

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN ĐĂNG MẠNH

**KK-LÝ THUYẾT ĐẲNG BIẾN VÀ CẤU TRÚC CỦA
C*-ĐẠI SỐ CỦA KHÔNG GIAN THUẦN NHẤT**

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

Hà Nội - 2008

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRƯỜNG ĐẠI HỌC KHOA HỌC TỰ NHIÊN

NGUYỄN ĐĂNG MẠNH

**KK-LÝ THUYẾT ĐẲNG BIẾN VÀ CẤU TRÚC CỦA
C*-ĐẠI SỐ CỦA KHÔNG GIAN THUẦN NHẤT**

Chuyên ngành: Giải tích

Mã số: 60 46 01

LUẬN VĂN THẠC SĨ KHOA HỌC

NGƯỜI HƯỚNG DẪN KHOA HỌC

GS. TSKH. ĐỖ NGỌC DIỆP

Hà Nội-2008

Mục lục

Mở đầu	v
Danh mục các ký hiệu	1
1 KK-lý thuyết đẳng biến	2
1.1 Sự ra đời và phát triển của KK -lý thuyết đẳng biến	2
1.2 Các cấu trúc đẳng biến	3
1.2.1 Một số cấu trúc C^* -đại số đẳng biến và C^* -module Hilbert đẳng biến.	3
1.2.2 Tính ổn định và G -ổn định của các G -đại số	6
1.3 Sự ổn định hóa KK -lý thuyết đẳng biến	7
1.3.1 Trường hợp chẵn	7
1.3.2 Trường hợp lẻ	15
1.4 Đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến	17
1.4.1 Đồng cấu hút đẳng biến	18
1.4.2 Đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến	19
1.4.3 Chứng minh KK -lý thuyết là tổng quát hóa của K -lý thuyết nhờ đối ngẫu Thomsen	22
2 Cấu trúc của C^*-đại số của không gian thuần nhất	26
2.1 Ý tưởng về khái niệm C^* -đại số của không gian thuần nhất	26
2.1.1 Không gian thuần nhất	26
2.1.2 C^* -đại số nhóm của một nhóm compact	27
2.1.3 Đơn giản hóa định nghĩa của $C^*(SU(m))$	28
2.1.4 C^* -đại số của không gian thuần nhất	30

2.2	Cấu trúc của các C^* -đại số của không gian thuần nhất	32
Phụ lục 42		
A Sơ lược về C^*-đại số 42		
A.1	Unita hóa một C^* -đại số	42
A.2	Phần tử dương và thứ tự trong một C^* -đại số	42
A.3	Ánh xạ hoàn toàn dương	43
A.4	σ -đại số	43
A.5	Đại số nhân tử	44
A.6	Tích tensor của các C^* đại số, C^* -đại số hạt nhân	45
A.7	Giới hạn quy nạp trong phạm trù các C^* đại số, AF -đại số	46
B Sơ lược về C^*-module Hilbert 48		
B.1	C^* -module Hilbert	48
B.2	C^* -module Hilbert phân bậc	49
B.3	Tích tensor trong	49
Kết luận 51		
Tài liệu tham khảo 52		

Lời cảm ơn

Đi dắt tôi đến một lĩnh vực vô cùng hấp dẫn của toán học, luôn tạo ra những thử thách giúp tôi tự học hỏi và nâng cao kiến thức chuyên môn, đó là những gì tôi may mắn được tiếp nhận từ người thầy đáng kính của tôi, GS. TSKH. Đỗ Ngọc Diệp. Tôi xin gửi đến thầy lòng biết ơn sâu sắc nhất.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành nhất với TS. Trần Đức Long, thầy giáo hướng dẫn khóa luận tốt nghiệp, người đã có ảnh hưởng lớn đến việc lựa chọn con đường khoa học của tôi.

Tôi xin gửi tới GS. TSKH Phạm Kỳ Anh và GS. TS Nguyễn Hữu Dư lòng biết ơn sâu sắc nhất. Các thầy đã có những động viên lớn đối với con đường khoa học của tôi cũng như giúp đỡ tôi đạt được học bổng nghiên cứu sinh ở nước ngoài sau khi tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành nhất với thầy giáo Vi Đức Cường, thầy giáo dạy toán cấp 3 của tôi, người đã giúp đỡ tôi rất nhiều để tôi đến được với con đường toán học như bây giờ.

Tôi xin gửi tới anh Nguyễn An Khương¹ lời cảm ơn chân thành nhất. Anh đã giúp tôi rất nhiều trong việc tìm kiếm các học bổng du học và rất nhiều tài liệu nghiên cứu, góp một phần quan trọng giúp tôi hoàn thành luận văn này.

Tôi cũng xin gửi lời cảm ơn sâu sắc đến các thầy cô giáo trong Khoa Toán-Cơ-Tin học, đặc biệt các thầy cô trong Bộ môn Giải tích, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên đã động viên, giúp đỡ tôi rất nhiều trong việc hoàn thành luận văn này.

Trong quá trình hoàn thành luận văn này, tôi đã tham gia sinh hoạt khoa học cùng Seminar của Phòng Hình học-Tôpô, Viện Toán học; tôi đã được học hỏi từ các thầy trong Seminar những kiến thức bổ ích về chuyên môn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn chân thành đến toàn bộ các thầy giáo Phòng Hình học-Tôpô, Viện Toán học.

¹ Nghiên cứu sinh trường University of Groningen, Groningen, Hà Lan

Luận văn được hoàn thành dưới sự ủng hộ, giúp đỡ nhiệt thành của người thân, các bạn cùng lớp và đặc biệt là sự ủng hộ về mặt tinh thần của một số bạn sinh viên lớp K52A1T, Khoa Toán-Cơ-Tin học, Đại học Khoa học Tự nhiên Hà Nội. Tôi xin gửi lời cảm ơn chân thành đến tất cả.

Hà Nội, ngày 20 tháng 10 năm 2008

Tác giả

Mở đầu

KK -lý thuyết là một bộ phận quan trọng của K -lý thuyết và một cách tự nhiên ta sẽ đi qua lịch sử phát triển của K -lý thuyết. Cha đẻ của K -lý thuyết là Alexander Grothendieck, ông đã đưa ra ý tưởng về K -nhóm trong một công trình của mình trong hình học đại số vào khoảng cuối những năm 1950. Năm 1959, Michael Atiyah và Friedrich Hirzebruch đã xây dựng K -lý thuyết trong tô pô (xem [2]). Song song với sự ra đời của K -lý thuyết tô pô, K -lý thuyết đại số đã được Daniel Quillen xây dựng. Ngay trong thời gian này, K -lý thuyết đã đánh dấu vai trò của nó trong giải tích với sự xuất hiện của định lý chỉ số Atiyah-Singer (xem [3]) và chính định lý này đã mở đầu cho sự phát triển của K -lý thuyết toán tử, tức K -lý thuyết trên phạm trù các C^* -đại số. Năm 1980, Gennadi Kasparov đã tổng quát hóa BDF-lý thuyết, K -lý thuyết toán tử và cho ra đời KK -lý thuyết hay còn gọi là K -song hàm tử (xem [32]). Hiện nay những nghiên cứu về KK -lý thuyết đang phát triển mạnh mẽ bởi vai trò quan trọng của nó trong lý thuyết của các toán tử elliptic tổng quát (xem [24, 33]), giả thuyết Novikov (Kasparov đã sử dụng KK -lý thuyết đẳng biến để chứng minh giả thuyết Novikov cho trường hợp các nhóm con rời rạc của một nhóm Lie, xem [34, 26]), trong giả thuyết Bauu-Connes (xem [51] hoặc [4, Mục 24.4]) và đặc biệt trong Vật lý với lý thuyết phân loại các D -màng (xem [53] hoặc [28, Phần I]).

Lịch sử ra đời của KK -lý thuyết

K -lý thuyết phức là một lý thuyết đối đồng điều suy rộng trên phạm trù các không gian Hausdorff compact. Một cách tự nhiên người ta mong muốn tìm được một lý thuyết đồng điều tương ứng và lý thuyết đồng điều đó được gọi là K -đồng điều. Xuất phát từ thực tế rằng nhóm đồng điều $K_0(X)$ đã được xây dựng nhờ đối ngẫu Spanier-Whitehead (xem [52]) trong trường hợp của một phức hữu hạn X , năm 1968 Atiyah (xem [1]) đã đặt ra bài toán về tìm một định nghĩa bằng lý thuyết toán tử cho hàm tử K -đồng điều

trên phạm trù các không gian Hausdorff compact. Bằng cách tổng quát hóa khái niệm các toán tử Fredholm, Atiyah đã đưa ra khái niệm sau

Cho X là một không gian Hausdorff compact, ký hiệu $Ell(X)$ là tập tất cả các bộ ba (σ_0, σ_1, T) , trong đó σ_i là biểu diễn của C^* -đại số giao hoán $C(X)$ trên không gian Hilbert \mathcal{H}_i ($i = 1, 2$), T là một toán tử Fredholm từ \mathcal{H}_0 vào \mathcal{H}_1 sao cho $T\sigma_0(f) - \sigma_1(f)T$ là các toán tử compact từ \mathcal{H}_0 vào \mathcal{H}_1 với mọi $f \in C(X)$.

Trong trường hợp X là các phức hữu hạn ông đã xây dựng được một ánh xạ từ $Ell(X)$ vào $K_0(X)$, nhóm K -đồng điều của X , và chứng minh được ánh xạ này là một toàn ánh. Tuy nhiên Atiyah đã không chỉ ra được một quan hệ tương đương trên $Ell(X)$ để khi chia thương cho quan hệ đó ta thu được song ánh vào $K_0(X)$.

Năm 1977, Brown, Douglas và Fillmore (xem [6]) đã đưa ra câu trả lời đầu tiên cho bài toán trên của Atiyah khi các ông nghiên cứu nhóm mở rộng $Ext(X)$ của các C^* -mở rộng có dạng

$$0 \rightarrow \mathbb{K} \rightarrow E \rightarrow C(X) \rightarrow 0 \quad (0.1)$$

trong đó \mathbb{K} là C^* -đại số các toán tử compact trên một không gian Hilbert vô hạn chiều tách được, X là một không gian Hausdorff compact, và đã chứng minh được rằng trong trường hợp X là một phức hữu hạn thì $Ext(X) \simeq K_1(X)$.

Bài toán tiếp theo được đặt ra là có thể thu được một kết quả mở rộng của BDF-lý thuyết đối với các C^* -mở rộng ở dạng tổng quát sau đây hay không?

$$0 \rightarrow B \rightarrow X \rightarrow A \rightarrow 0 \quad (0.2)$$

trong đó A, B là các C^* -đại số bất kỳ. Được khích lệ bởi các kết quả ứng dụng BDF-lý thuyết để nghiên cứu cấu trúc của các C^* -đại số của Đỗ Ngọc Diệp (xem [11]), năm 1980 Kasparov đã thành công trong việc mở rộng kết quả của Brown, Douglas và Fillmore cho trường hợp các C^* -mở rộng có dạng (0.2) (xem [32]). Ông đã đưa ra định nghĩa về một song hàm tử KK -lý thuyết và chỉ ra rằng nhóm $Ext(A, B)$ của các C^* -mở rộng có dạng (0.2) đẳng cấu với nhóm $KK^1(A, B)$ do ông xây dựng trong trường hợp A là một C^* -đại số tách được và B là một C^* -đại số hạt nhân². Như vậy bằng việc đề xuất khái niệm KK -lý thuyết Kasparov đã giải quyết trọn vẹn bài toán do Atiyah đặt ra.

Lịch sử vấn đề cần nghiên cứu

Lấy ý tưởng từ sự ra đời của cơ học lượng tử mà trong đó, đứng trên quan điểm toán học, việc nghiên cứu đại số giao hoán của các hàm trên một không gian trong cơ học cổ điển được thay thế bởi việc nghiên cứu các đại số không giao hoán của các toán tử trên

² Xem Phụ lục A.6

một không gian Hilbert, năm 1983 nhà toán học người Pháp Alain Connes³ đã đề xuất chương trình hình học không giao hoán.

Trong chương trình này các nhà toán học đã xây dựng được hàng loạt các đối tượng không giao hoán tương ứng với các đối tượng trong hình học cổ điển. Ta sẽ đi qua một số mốc lịch sử đóng vai trò quan trọng trong sự ra đời của chương trình hình học không giao hoán. Năm 1943, Gelfand-Naïmark[22] đã chứng minh được rằng có một đối ngẫu giữa các C^* -đại số giao hoán với các không gian Hausdorff compact địa phương và từ đó mỗi C^* -đại số không giao hoán được coi như tương ứng với một không gian hình học “không giao hoán”. Năm 1962, Serre-Swan⁴[54] chỉ ra rằng các phân thớ véctơ trong hình học cổ điển có thể được thay thế bởi các module xạ ảnh hữu hạn sinh và từ đó đặt cơ sở cho việc xây dựng phiên bản không giao hoán của K -lý thuyết tôpô là K -lý thuyết toán tử. Đến năm 1987, Woronowicz[64] đã xây dựng các nhóm lượng tử ma trận compact, mở đầu cho lý thuyết về nhóm lượng tử, đối tượng được coi như phiên bản không giao hoán của nhóm cổ điển. Năm 1980, Kasparov[32] đã xây dựng thành công phiên bản không giao hoán của BDF -lý thuyết là KK -lý thuyết. Năm 1983, những công trình đầu tiên của Connes về hình học không giao hoán được xuất bản (xem [56]).

Chương trình hình học không giao hoán hiện nay vẫn là một bài toán mở lớn. Nó đòi hỏi các nhà toán học xây dựng và nghiên cứu các đối tượng không giao hoán tương ứng với các đối tượng cổ điển. Trong hướng nghiên cứu này Đỗ Ngọc Diệp đã xây dựng và nghiên cứu thành công hàng loạt các đối tượng không giao hoán như đặc trưng Chern không giao hoán, đặc trưng Chern-Connes không giao hoán (xem [14, 15, 16]), định lý Riemann-Roch, định lý chỉ số, đối đồng điều Čech không giao hoán (xem [17, 18]), ứng dụng của phương pháp hình học không giao hoán vào nghiên cứu các C^* -đại số nhóm (xem [12, 13]), đồng thời ông cũng đang xây dựng một số các đối tượng không giao hoán khác như CW -phức không giao hoán, phân thớ Serre không giao hoán (xem [19]), các khung không giao hoán (xem [20]). Vấn đề nghiên cứu của luận văn là sự nối tiếp các công trình nêu trên của Đỗ Ngọc Diệp. Trong luận văn này chúng tôi sẽ đề xuất khái niệm và nghiên cứu cấu trúc của các C^* -đại số của không gian thuần nhất, các không gian này được coi như phiên bản “không giao hoán” tương ứng với các không gian thuần nhất cổ điển và do đó cũng được gọi là các không gian thuần nhất không giao hoán.

Kết quả chính và nội dung của luận văn

Kết quả chính của luận văn bao gồm

³ Ông được trao tặng giải thưởng Fields năm 1982

⁴ Thực chất là trong một công trình của Swan tuy nhiên Serre đã đưa ra ý tưởng từ trước đó

- ◆ Kết quả đầu tiên của luận văn là đưa ra một chứng minh khác cho khẳng định rằng KK -lý thuyết là một tổng quát hóa của K -lý thuyết. Để thực hiện điều này chúng tôi sử dụng định lý Voiculescu-Kasparov[31] để xây dựng cụ thể một $*$ -đồng cấu hút rời từ đó thực hiện việc tính toán trực tiếp các đại số đối ngẫu trong đối ngẫu Thomsen và áp dụng đối ngẫu này để suy ra kết quả cần chứng minh.
- ◆ Kết quả chính tiếp theo là việc nghiên cứu cấu trúc của không gian thuần nhất không giao hoán $C_{n,k}^*$. Việc nghiên cứu này được bắt đầu bằng việc mô tả cấu trúc của các không gian thuần nhất và C^* -đại số nhóm tương ứng. Bằng việc chứng minh một số kết quả liên quan đến các hàm hệ số ma trận chúng tôi thu được một mô tả thu gọn của C^* -đại số $C^*(SU(m))$ và từ đó đề xuất các khái niệm C^* -đại số của không gian thuần nhất. Sau đó bằng việc sử dụng các kỹ thuật của đại số toán tử chúng tôi chứng minh được C^* -đại số $C_{n,k}^*$ là một AF -đại số và từ đó thu được mô tả ở mức độ K -lý thuyết của C^* -đại số này.

Nội dung chính của luận văn bao gồm

- ◆ *Phần mở đầu* giới thiệu tổng quan về lịch sử ra đời của đối tượng làm việc chính, xuất xứ của vấn đề cần nghiên cứu và nội dung chính của luận văn.
- ◆ *Chương một* của luận văn trình bày tổng quan về KK -lý thuyết đẳng biến, kết quả của Mayer-Thomsen trong việc nghiên cứu tính ổn định của KK -lý thuyết đẳng biến và đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến. Đóng góp của chúng tôi trong chương này là sử dụng đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến để đưa ra một chứng minh khác cho khẳng định rằng K -lý thuyết là một trường hợp riêng của KK -lý thuyết.
- ◆ *Chương hai* trình bày kết quả nghiên cứu chính của luận văn. Trong chương này chúng tôi trình bày các kết quả liên quan đến cấu trúc của các không gian thuần nhất $SU(n+k)/SU(n)$ và C^* -đại số nhóm $C^*(SU(m))$ làm cơ sở cho việc đề xuất ý tưởng về các C^* -đại số của không gian thuần nhất. Tiếp đó chúng tôi chứng minh một loạt các kết quả liên quan đến các hàm hệ số ma trận và từ đó thu được sự mô tả cấu trúc của C^* -đại số của không gian thuần nhất $C_{n,k}^*$ ở mức độ K -lý thuyết.
- ◆ *Phụ lục* của luận văn trình bày những kiến thức cơ bản về các C^* -đại số và C^* -module Hilbert làm nền tảng cho việc xây dựng lý thuyết được trình bày trong phần chính của luận văn.

Danh mục các ký hiệu

\mathbb{B} : C^* -đại số của các toán tử tuyến tính liên tục trên l_2

\widehat{G} : Vật đối ngẫu của nhóm G

\mathbb{K} : C^* -đại số của các toán tử compact trên không gian Hilbert l_2

$K_0(A)$: Nhóm K -lý thuyết chẵn của C^* -đại số A

$K_1(A)$: Nhóm K -lý thuyết lẻ của C^* -đại số A

\mathcal{K}_G : C^* -đại số của các toán tử compact trên $L^2(G)$

$KK(A, B)_G^0$: Nhóm KK -lý thuyết đẳng biến chẵn của các C^* -đại số A và B

$KK(A, B)_G^1$: Nhóm KK -lý thuyết đẳng biến lẻ của các C^* -đại số A và B

l_2 : Không gian Hilbert $\{(x_1, x_2, \dots) : x_i \in \mathbb{C}, i = 1, 2, \dots, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^2 < \infty\}$

$L^2(G)$: Không gian Hilbert các hàm phức trên G và $\int_G |f(g)|^2 d\mu(g) < \infty$

$\mathbb{L}_B(E)$: C^* -đại số các toán tử khả liên hợp trên B -module Hilbert E

$M(A)$: Đại số nhân tử của C^* -đại số A

\mathbb{N} : Tập các số nguyên dương

\mathbb{Q} : Đại số Calkin $M(\mathbb{K})/\mathbb{K}$

\mathbb{Z} : Tập các số nguyên

KK-lý thuyết đẳng biến

1.1	Sự ra đời và phát triển của <i>KK</i> -lý thuyết đẳng biến	2
1.2	Các cấu trúc đẳng biến	3
1.2.1	Một số cấu trúc C^* -đại số đẳng biến và C^* -module Hilbert đẳng biến	3
1.2.2	Tính ổn định và G -ổn định của các G -đại số	6
1.3	Sự ổn định hóa <i>KK</i> -lý thuyết đẳng biến	7
1.3.1	Trường hợp chẵn	7
1.3.2	Trường hợp lẻ	15
1.4	Đối ngẫu Thomsen trong <i>KK</i> -lý thuyết đẳng biến	17
1.4.1	Đòng cấu hút đẳng biến	18
1.4.2	Đối ngẫu Thomsen trong <i>KK</i> -lý thuyết đẳng biến	19
1.4.3	Chứng minh <i>KK</i> -lý thuyết là tổng quát hóa của K -lý thuyết nhờ đối ngẫu Thomsen	22

1.1 Sự ra đời và phát triển của *KK*-lý thuyết đẳng biến

KK-lý thuyết đẳng biến là một bộ phận quan trọng của *KK*-lý thuyết, được đề xuất vào năm 1988 bởi Kasparov khi ông muốn tìm một phiên bản đẳng biến của *KK*-lý thuyết không đẳng biến do chính ông đề xuất với mục đích ban đầu là nghiên cứu giả thuyết Novikov (xem [34]).

Đối với *KK*-lý thuyết đẳng biến với tác động của một nhóm compact thì mọi kết quả thu được từ *KK*-lý thuyết không đẳng biến được suy ra một cách trực tiếp và đã được chính Kasparov xây dựng (xem [32]). Đối với trường hợp nhóm tác động chỉ thỏa mãn tính chất compact địa phương và tiên đề đếm được thứ hai thì mọi sự tổng quát hóa là không tầm thường. Lý do chính của sự khó khăn này là định lý ổn định của Kasparov cho trường hợp không đẳng biến (xem [31, Định lý 2]) không còn đúng trong trường hợp nhóm tác động là một nhóm compact địa phương nữa (xem [39, Mục 1]). Năm 2000, Meyer đã đề xuất một ý tưởng để khắc phục khó khăn trên khi ông đòi hỏi tác động trái

của một C^* -đại số trên một bộ ba Kasparov tương ứng phải có tính chất cốt yếu¹ (xem [39]). Bằng cách này ông đã thu được rất nhiều kết quả quan trọng như chứng minh được bức tranh Cuntz cho trường hợp KK -lý thuyết đẳng biến (trường hợp không đẳng biến xem [10]), đưa ra một chứng minh khác cho tính chất là một hàm tử đồng luân, ổn định, chẻ, khớp phổ dụng của KK -lý thuyết đẳng biến.

Để làm rõ ý nghĩa của nội dung được trình bày trong chương này, ta tóm tắt những đóng góp chính của Klaus Thomsen cho việc phát triển KK -lý thuyết đẳng biến. Đóng góp đáng kể đầu tiên của Thomsen là việc ông đã chứng minh được tính chất là một hàm tử đồng luân, ổn định, chẻ, khớp phổ dụng của KK -lý thuyết đẳng biến (xem [58]). Kể đến năm 2000 ông đã chứng minh được phiên bản đẳng biến kết quả của Kasparov về mối quan hệ giữa KK -lý thuyết và lý thuyết mở rộng của các C^* -đại số (xem [59]). Năm 2005, Thomsen đã nghiên cứu những cấu trúc ổn định của KK -lý thuyết đẳng biến do Meyer đề xuất, mà trong cấu trúc đó các phần tử của KK -nhóm được đặc trưng bởi các bộ ba Kasparov cơ bản và cốt yếu (xem [39, Bổ đề 3.3]), nhờ đó ông đã chứng minh được tính ổn định của các phần tử trong KK -nhóm với “nhiều” của các bộ ba Kasparov suy biến và đồng thời sử dụng kết quả này để chứng minh một đối ngẫu² giữa KK -lý thuyết đẳng biến của một cặp G -đại số và K -lý thuyết của một C^* -đại số tương ứng (xem [61]).

Nội dung của phần này của luận văn sẽ hướng vào mục tiêu mô tả theo hướng nghiên cứu của Thomsen cấu trúc của KK -lý thuyết đẳng biến như đã nói ở trên. Các tài liệu [29, 61, 34] là những tài liệu chính để tìm hiểu về KK -lý thuyết đẳng biến. Trong toàn bộ chương này ta luôn giả sử G là một nhóm compact địa phương thỏa mãn tiên đề đếm được thứ hai.

1.2 Các cấu trúc đẳng biến

1.2.1 Một số cấu trúc C^* -đại số đẳng biến và C^* -module Hilbert đẳng biến

Phần này của luận văn sẽ trình bày việc xây dựng các cấu trúc đẳng biến của các đối tượng không đẳng biến tương ứng. Phần kiến thức chuẩn bị cho mục này liên quan đến các cấu trúc không đẳng biến được trình bày trong Phụ lục B của luận văn.

G -đại số

¹ Xem định nghĩa 1.9

² Ta sẽ bàn về đối ngẫu này ở chương tiếp theo

Chúng ta sẽ bắt đầu với khái niệm về một G -đại số, là phiên bản đẳng biến của một C^* -đại số không đẳng biến.

Định nghĩa 1.1 (G -đại số). Một G -đại số là một cặp (A, α) trong đó A là một σ -unital C^* -đại số³ và $\alpha : G \rightarrow \text{Aut}(A)$ là một đồng cấu nhóm sao cho ánh xạ $G \ni g \mapsto \alpha_g(a)$ liên tục theo chuẩn với mọi $a \in A$.

Nhận xét. Từ định nghĩa của một G -đại số, cho trước hai G -đại số A và B ta có thể cho tích tensor cực tiểu $A \otimes_* B$ (xem Phụ lục A.6) cấu trúc của một G -đại số nhờ tác động:

$$g.(a \otimes b) = g.a \otimes g.b \quad (1.1)$$

với mọi $g \in G, a \in A, b \in B$.

G -module Hilbert

Tiếp theo là khái niệm về một G -module Hilbert, phiên bản đẳng biến của C^* -module Hilbert.

Định nghĩa 1.2 (G -module Hilbert). Cho (B, β) là một G -đại số. Một B, G -module Hilbert là một cặp (E, ν) , trong đó E là một B -module Hilbert và ν là một biểu diễn của G vào không gian các phép biến đổi tuyến tính trên E sao cho

- Ánh xạ $G \times E \ni (g, e) \mapsto \nu_g(e)$ liên tục.
- $\nu_g(e.b) = \nu_g(e)\beta_g(b)$ với mọi $g \in G, e \in E, b \in B$.
- $\langle \nu_g(e), \nu_g(f) \rangle = \beta_g(\langle e, f \rangle)$ với mọi $g \in G, e, f \in E$.

Nhận xét. Giả sử (B, β) là một G -đại số, (E, ν) và (F, ω) là các B, G -module Hilbert. Tác động ν và ω của G cảm sinh một tác động của G trên $\mathbb{L}_B(E, F)$, không gian các toán tử khả liên hợp từ B -module Hilbert E vào B -module Hilbert F , theo công thức $g.L = \omega_g L \nu_{g^{-1}}$.

Định nghĩa 1.3 (G -module Hilbert phân bậc). Cho B là một G -đại số. Một B, G -module Hilbert phân bậc là một B -module Hilbert phân bậc⁴ sao cho tác động của nhóm G trên E bảo toàn bậc của sự phân bậc trên E .

Ví dụ 1.1 (Tích tensor trong đẳng biến). Giả sử A là một G -đại số, E là một B, G -module Hilbert, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến. Trong Phụ lục B.3 ta đã xây dựng tích tensor trong phân bậc $A \otimes_{\varphi} E$. Ta định nghĩa một tác động của G trên $A \otimes_{\varphi} E$ như sau

³ Xem Phụ lục A.4

⁴ Xem Phụ lục B.2

$$g.(a \underset{\varphi}{\otimes} e) = g.a \underset{\varphi}{\otimes} g.e \quad (g \in G, a \in A, e \in E).$$

Để dàng kiểm tra được rằng với tác động trên của G thì $A \underset{\varphi}{\otimes} E$ trở thành một B, G -module Hilbert.

G -module Hilbert $L^2(G, E)$

Cho B là một G -đại số và (E, ν) là một B, G -module Hilbert. Ký hiệu $L^2(G, E)$ là không gian véctơ phức các hàm $f : G \rightarrow E$ bình phương khả tích theo nghĩa tích phân theo độ đo Haar trái trên G của hàm f tồn tại, tức là $\int_G \|f(g)\|^2 d\mu(g) < \infty$.

Trang bị cho $L^2(G, E)$ cấu trúc một B -module như sau $(f.b)(g) = f(g)b$ với mọi $f \in L^2(G, E)$, $b \in B$, $g \in G$ và tích trong $\langle f, h \rangle = \int_G \langle f(g), h(g) \rangle d\mu(g)$ với mọi $f, h \in L^2(G, E)$.

Để dàng kiểm tra với các cấu trúc trên thì $L^2(G, E)$ trở thành một B -module Hilbert. Để $L^2(G, E)$ trở thành một B, G -module Hilbert ta tiếp tục trang bị cho $L^2(G, E)$ một tác động $\nu \otimes \lambda$ của nhóm G theo công thức sau

$$(\nu \otimes \lambda)_t f(s) = \nu_t f(t^{-1}s)$$

với mọi $f \in L^2(G, E)$, $t, s \in G$. Để dàng kiểm tra khi đó $(L^2(G, E), \nu \otimes \lambda)$ trở thành một B, G -module Hilbert.

E^∞

Cho E là một B, G -module Hilbert. Ký hiệu E^∞ là không gian véctơ phức các dãy (e_1, e_2, e_3, \dots) với các $e_i \in E$, $i = 1, 2, \dots$ sao cho chuỗi $\sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, e_i \rangle$ hội tụ theo chuẩn trong B . Để dàng kiểm tra rằng E^∞ trở thành một B -module Hilbert nếu ta trang bị cho E^∞ cấu trúc B -module với

$$(e_1, e_2, e_3, \dots).b = (e_1.b, e_2.b, e_3.b, \dots)$$

và tích trong

$$\langle (e_1, e_2, e_3, \dots), (f_1, f_2, f_3, \dots) \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} \langle e_i, f_i \rangle$$

với mọi $(e_1, e_2, e_3, \dots), (f_1, f_2, f_3, \dots) \in E^\infty$, $b \in B$.

Ta tiếp tục trang bị cho E^∞ cấu trúc của một B, G -module Hilbert với tác động dưới đây của nhóm G

$$t.(e_1, e_2, e_3, \dots) = (t.e_1, t.e_2, t.e_3, \dots)$$

với mọi $(e_1, e_2, e_3, \dots) \in E^\infty$, $t \in G$. Khi đó E^∞ có cấu trúc của một B, G -module Hilbert.

B, G -module Hilbert đếm được sinh

Định nghĩa 1.4. Một B, G -module Hilbert E được gọi là đếm được sinh nếu tồn tại một tập đếm được phần tử M của E sao cho bao tuyến tính của MB trù mật trong E

Ví dụ 1.2. Giả sử B là một G -đại số. Khi đó nó là một σ -đại số, từ đó một cách trực tiếp suy ra được B là một B, G -module Hilbert đếm được sinh trong đó tập con đếm được trù mật trong B chính là dãy đơn vị xấp xỉ của B .

1.2.2 Tính ổn định và G -ổn định của các G -đại số **G -đại số ổn định**

Gọi \mathbb{K} là C^* -đại số của các toán tử compact trên không gian Hilbert l_2 . Xem \mathbb{K} là một G -đại số với tác động tầm thường của nhóm G . Khi đó

Định nghĩa 1.5. Một G -đại số B được gọi là ổn định nếu các G -đại số B và $B \otimes \mathbb{K}$ đẳng cấu với nhau.

 G -đại số G -ổn định

Gọi \mathcal{K}_G là C^* -đại số của các toán tử compact trên không gian Hilbert $L^2(G)$. Gọi λ là biểu diễn chính quy trái của nhóm G trên $L^2(G)$. Khi đó $(\mathcal{K}_G, Ad\lambda)$ trở thành một G -đại số. Ký hiệu \mathbb{K}_G là G -đại số

$$(\mathbb{K} \otimes \mathcal{K}_G, id_{\mathbb{K}} \otimes Ad\lambda).$$

Khi đó ta có định nghĩa một G -đại số G -ổn định như sau

Định nghĩa 1.6. Một G -đại số A được gọi là G -ổn định nếu các G -đại số A và $A \otimes \mathbb{K}_G$ đẳng cấu với nhau.

Định lý sau đây của Meyer là mấu chốt cho việc nghiên cứu tính ổn định hóa các phần tử của KK -nhóm của Thomsen.

Định lý 1.1 ([39]). Cho A và B là các G -đại số, A là G -ổn định, E là một B, G -module Hilbert đếm được sinh và $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến sao cho $\overline{\varphi(A)E} = E$. Khi đó ta có đẳng cấu giữa các B, G -module Hilbert sau

$$E \oplus L^2(G, B^\infty) \simeq L^2(G, B^\infty).$$

Như đã nói trong Mục 1.1, định lý ổn định của Kasparov trong trường hợp không đẳng biến nói chung không còn đúng trong trường hợp đẳng biến nữa. Tuy nhiên định lý sau đây cho ta một trường hợp mà định lý ổn định đó đúng.

Định lý 1.2. Cho A và B là các G -đại số G -ổn định, E là một B, G -module Hilbert đếm được sinh và $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến sao cho $\overline{\varphi(A)E} = E$. Khi đó ta có đẳng cấu giữa các B, G -module Hilbert sau

$$E \oplus B \simeq B.$$

Chứng minh. Chú ý rằng các đẳng cấu trong chứng minh này sẽ được hiểu là đẳng cấu giữa các B, G -module Hilbert. Vì B là C^* -đại số G -ổn định nên nó ổn định. Do đó nhờ [29, Bổ đề 1.3.2] ta có

$$B^\infty \simeq B. \quad (1.2)$$

Mặt khác do B là G -ổn định nên theo [61, Bổ đề 2.6] ta có

$$B \simeq L^2(G, B). \quad (1.3)$$

Kết hợp Định lý 1.1 và các biểu thức (1.2), (1.3) ta có

$$\begin{aligned} E \oplus B &\simeq E \oplus L^2(G, B) \simeq E \oplus L^2(G, B^\infty) \\ &\simeq L^2(G, B^\infty) \simeq L^2(G, B) \\ &\simeq B. \end{aligned}$$

■

1.3 Sự ổn định hóa KK -lý thuyết đẳng biến

Phần này của luận văn sẽ nghiên cứu việc đơn giản hóa khái niệm của KK -lý thuyết đẳng biến thông qua việc nghiên cứu tính ổn định của các phần tử trong các KK -nhóm với “nhiều” của các phần tử suy biến và đặc trưng của chúng bởi các bộ ba Kasparov cơ bản và cốt yếu. Có thể tham khảo thêm các cách đơn giản hóa cho trường hợp không đẳng biến trong [4, Mục 17.4] để thấy rằng công việc đơn giản hóa ở đây được tiến hành theo một hướng khác, trong đó một trong những công cụ chính là các liên thông được đề xuất bởi Connes và Skandalis (xem [8]). Trong mục này ta luôn giả sử A và B là các G -đại số, A tách được và B ổn định.

1.3.1 Trường hợp chặn

Trong phần này ta sẽ nghiên cứu sự ổn định trong trường hợp chặn, tức trường hợp các bộ ba Kasparov là chặn.

Nhóm $KK_G^0(A, B)$

Định nghĩa 1.7 (Bộ ba Kasparov chẵn). Một bộ ba Kasparov chẵn cho hai G -đại số A và B là một bộ ba đối tượng (E, φ, F) , trong đó E là một B, G -module Hilbert đếm được sinh phân bậc, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến ánh xạ A vào các phần tử bậc 0 của $\mathbb{L}_B(E)$ và F là một toán tử bậc 1 trong $\mathbb{L}_B(E)$ sao cho

$$(F^* - F)\varphi(a), (F^2 - 1)\varphi(a), F\varphi(a) - \varphi(a)F, (g.F - F)\varphi(a) \in \mathbb{K}_B(E)$$

với mọi $a \in A$ và $g \in G$.

Tập hợp mọi bộ ba Kasparov chẵn cho hai G -đại số A và B được ký hiệu là $\mathbb{E}_G(A, B)$.

Bộ ba Kasparov chẵn (E, φ, F) được gọi là suy biến nếu

$$(F^* - F)\varphi(a) = (F^2 - 1)\varphi(a) = F\varphi(a) - \varphi(a)F = (g.F - F)\varphi(a) = 0$$

với mọi $a \in A$ và $g \in G$.

Tập hợp các bộ ba Kasparov chẵn suy biến cho hai G -đại số A và B được ký hiệu là $\mathbb{D}_G(A, B)$.

Ta sẽ định nghĩa một số khái niệm cơ bản trên các bộ ba Kasparov chẵn như sau:

Hai bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, F_1)$ và $\mathcal{E}_2 = (E_2, \varphi_2, F_2)$ cho hai G -đại số A và B được gọi là đẳng cấu với nhau, ký hiệu là $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_2$, nếu tồn tại một đẳng cấu $\zeta : E_1 \rightarrow E_2$ giữa các B, G -module Hilbert sao cho $S_{E_2} \circ \zeta = \zeta \circ S_{E_1}$, $F_2 \circ \zeta = \zeta \circ F_1$ và $\varphi_2(a) \circ \zeta = \zeta \circ \varphi_1(a)$ ($a \in A$), trong đó S_{E_1} và S_{E_2} lần lượt là các toán tử phân bậc của các B, G -module Hilbert E_1 và E_2 .

Hai bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{E}_0 = (E_0, \varphi_0, F_0)$ và $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, F_1)$ cho hai G -đại số A và B được gọi là đồng luân toán tử với nhau, ký hiệu là $\mathcal{E}_0 \sim_{OH} \mathcal{E}_1$, nếu tồn tại một họ các bộ ba Kasparov chẵn (E, φ, G_t) , $t \in [0, 1]$ cho A và B sao cho ánh xạ $[0, 1] \ni t \mapsto G_t$ liên tục theo chuẩn, (E, φ, G_0) đẳng cấu với (E_0, φ_0, F_0) và (E, φ, G_1) đẳng cấu với (E_1, φ_1, F_1) .

Tổng trực tiếp của hai bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, F_1)$ và $\mathcal{E}_2 = (E_2, \varphi_2, F_2)$ cho hai G -đại số A và B là bộ ba Kasparov

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = (E_1, \varphi_1, F_1) \oplus (E_2, \varphi_2, F_2) = (E_1 \oplus E_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2, F_1 \oplus F_2) \quad (1.4)$$

trong đó $E_1 \oplus E_2$ được phân bậc bởi toán tử phân bậc là tổng trực tiếp các toán tử phân bậc của E_1 và E_2 .

Định nghĩa 1.8 (Nhóm KK-lý thuyết đẳng biến chẵn). Ta định nghĩa một quan hệ trên $\mathbb{E}_G(A, B)$ như sau: Hai bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{E}_G(A, B)$ được gọi là có quan hệ

\sim_{KK} với nhau, ta viết $\mathcal{E}_1 \sim_{KK} \mathcal{E}_2$, nếu tồn tại các bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathbb{D}_G(A, B)$ sao cho

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{D}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{D}_2.$$

Do quan hệ \sim_{OH} là một quan hệ tương đương nên \sim_{KK} là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{E}_G(A, B)$. Khi đó ta gọi $KK_G^0(A, B)$ là thương của $\mathbb{E}_G(A, B)$ đối với quan hệ tương đương \sim_{KK} , ta có

$$KK_G^0(A, B) = \mathbb{E}_G(A, B) / \sim_{KK} = \{\bar{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \in \mathbb{E}_G(A, B)\}$$

trong đó

$$\bar{\mathcal{E}} = \{\mathcal{F} \in \mathbb{E}_G(A, B) : \mathcal{F} \sim_{KK} \mathcal{E}\}.$$

Ta định nghĩa một phép toán cộng trên $KK_G^0(A, B)$ như sau: Với hai phần tử bất kỳ $\psi_1, \psi_2 \in KK_G^0(A, B)$, giả sử \mathcal{E}_1 và \mathcal{E}_2 là hai bộ ba Kasparov chẵn lần lượt thuộc ψ_1 và ψ_2 . Ta định nghĩa tổng của hai lớp ψ_1 và ψ_2 , ký hiệu là $\psi_1 + \psi_2$, là một lớp tương đương theo quan hệ \sim_{KK} với đại diện là bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. Do tổng hai bộ ba Kasparov chẵn suy biến là một bộ ba suy biến và nếu $\mathcal{E}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}_2 \sim_{OH} \mathcal{E}'_2$ thì $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \sim_{OH} \mathcal{E}'_1 \oplus \mathcal{E}'_2$ với mọi $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}'_2 \in \mathbb{E}_G(A, B)$, nên định nghĩa phép cộng như trên là xác định.

Định lý 1.3. $KK_G^0(A, B)$ là một nhóm giao hoán.

Chứng minh. Hiển nhiên $0 = \bar{\mathcal{D}}$ với $\mathcal{D} \in \mathbb{D}_G(A, B)$ là phần tử trung hòa của $KK_G^0(A, B)$. Xét phần tử bất kỳ $\bar{\mathcal{E}} \in KK_G^0(A, B)$, trong đó $\mathcal{E} = (E, \varphi, F) \in \mathbb{E}_G(A, B)$. Gọi S_E là toán tử phân bậc của E . Ký hiệu $-E$ là B, G -module Hilbert E phân bậc bởi ánh xạ $-S_E$ và $-\mathcal{E} = (-E, \varphi, -F)$. Ta sẽ chứng minh $\overline{-\mathcal{E}}$ là nghịch đảo của phần tử $\bar{\mathcal{E}}$. Thật vậy, xét họ các bộ ba Kasparov chẵn sau đây

$$\mathcal{E}_t = (E \oplus (-E), \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\cos t)F & \sin t \\ \sin t & (-\cos t)F \end{pmatrix})$$

với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Do $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \oplus (-\mathcal{E})$ và $\mathcal{E}_{\pi/2} = (E \oplus (-E), \varphi \oplus \varphi, \hat{1}) \in \mathbb{D}_G(A, B)$ nên

$$\mathcal{E} \oplus (-\mathcal{E}) \sim_{OH} \mathcal{E}_{\pi/2}$$

và do đó $\bar{\mathcal{E}} + \overline{-\mathcal{E}} = 0$. Vì vậy $\overline{-\mathcal{E}}$ là nghịch đảo của $\bar{\mathcal{E}}$.

Việc kiểm tra $KK_G^0(A, B)$ thỏa mãn những điều kiện còn lại để trở thành một nhóm giao hoán là tầm thường. Vậy ta có điều phải chứng minh. \blacksquare

Các bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất, cơ bản, cốt yếu

Định nghĩa 1.9. Gọi B^e là B, G -module Hilbert phân bậc $B \oplus B$ với ánh xạ phân bậc $B \oplus B \ni (x, y) \mapsto (x, -y) \in B \oplus B$. Một bộ ba Kasparov chẵn (E, φ, F) cho A và B được gọi là cơ bản nếu $E = B^e$ và cốt yếu nếu $\overline{\varphi(A)E} = E$.

Bộ ba Kasparov chẵn (E, φ, F) được gọi là thuần nhất nếu B, G -module Hilbert phân bậc E có dạng $E = E_0 \oplus E_0$, E_0 là một B, G -module Hilbert nào đó, với ánh xạ phân bậc $E_0 \oplus E_0 \ni (x, y) \mapsto (x, -y) \in E_0 \oplus E_0$ và $\varphi = (\psi, \psi)$ trong đó $\psi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E_0)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến.

Nhận xét. Chúng ta dễ dàng suy ra được hai nhận xét sau:

- Tổng trực tiếp của hai bộ ba Kasparov chẵn cơ bản (tương ứng cốt yếu) là một bộ ba Kasparov chẵn cơ bản (tương ứng cốt yếu).
- Nếu $(E_0 \oplus E_0, (\psi, \psi), F)$ là một bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất thì $(E_0 \oplus E_0, (\psi, \psi), \widehat{1})$, với, $\widehat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, là một bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất và suy biến.

Ta sẽ nghiên cứu đặc trưng Meyer-Thomsen của các phần tử trong một KK -nhóm bởi các bộ ba Kasparov chẵn cơ bản, cốt yếu ổn định với “nhiều” của các bộ ba Kasparov chẵn suy biến. Chiếc cầu trung gian của công việc này chính là các bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất. Đầu tiên ta thay thế một bộ ba Kasparov chẵn bất kỳ bởi một bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất (sai khác một bộ ba Kasparov chẵn suy biến), nhờ Định lý 1.4. Tiếp đó sử dụng khái niệm liên thông do Connes và Skandalis xây dựng (xem [8]) ta thay thế được các bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất bởi các bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu (sai khác một bộ ba Kasparov chẵn suy biến) nhờ Bổ đề 1.1. Sau đó sử dụng Định lý ổn định 1.2 ta thu được kết quả cuối cùng.

Định lý 1.4. Cho $\mathcal{E} = (E, \varphi, F)$ là một bộ ba Kasparov chẵn. Khi đó tồn tại một bộ ba Kasparov chẵn suy biến \mathcal{D} sao cho $\mathcal{E} \oplus \mathcal{D}$ đẳng cấu với một bộ ba Kasparov chẵn thuần nhất. Nếu \mathcal{E} là cơ bản thì có thể chọn được \mathcal{D} là bộ ba Kasparov chẵn cơ bản và suy biến.

Chứng minh của định lý này có thể xem trong [61, Bổ đề 3.2].

F -liên thông

Cho E là một B, G -module Hilbert và $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến. Trong Ví dụ 1.1 ta đã xây dựng được tích tensor trong phân bậc $E' = A \otimes_{\varphi} E$. Bây giờ ta sẽ làm việc với khái niệm các liên thông trong $\mathbb{L}_B(E')$.

Định nghĩa 1.10. Với mỗi $a \in A$, gọi $T_a : E \rightarrow E'$ là ánh xạ xác định bởi $T_a(y) = a \otimes_{\varphi} y$, với mọi $y \in E$. Dễ dàng kiểm tra rằng T_a là một toán tử khả liên hợp và $T_a^*(b \otimes_{\varphi} e) = \varphi(a^*b)e$.

Ta xác định toán tử \tilde{T}_a , $a \in A$ như sau

$$\tilde{T}_a = \begin{pmatrix} 0 & T_a^* \\ T_a & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{L}_B(E \oplus E').$$

Với mỗi $F \in \mathbb{L}_B(E)$, một toán tử $F' \in \mathbb{L}_B(E')$ thỏa mãn

$$[\tilde{T}_a, F \oplus F'] \in \mathbb{K}_B(E \oplus E') \quad (1.5)$$

với mọi $a \in A$ được gọi là một F -liên thông.

Nhận xét. Dễ dàng kiểm tra được rằng điều kiện (1.5) là tương đương với hệ sau

$$\begin{cases} T_a F - F' T_a \in \mathbb{K}_B(E, E') \\ F T_a^* - T_a^* F' \in \mathbb{K}_B(E', E) \end{cases}$$

với mọi $a \in A$.

Định lý sau đây của Meyer (xem [39, Mục 3]) đóng vai trò quyết định trong việc xây dựng đặc trưng bởi một bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu của các phần tử trong KK -nhóm chẵn đẳng biến.

Định lý 1.5 ([39]). Cho A và B là các G -đại số, A là G -ổn định và $\mathcal{E} = (E, \varphi, F)$ là một bộ ba Kasparov chẵn sao cho $\overline{\varphi(A)E} = E$. Khi đó

(i) Tồn tại một F -liên thông F' G -bất biến và có bậc 1.

(ii) Ta định nghĩa ánh xạ $\varphi' : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E')$ bởi công thức

$$\varphi'(a)(a_1 \otimes_{\varphi} e) = aa_1 \otimes_{\varphi} e \quad (a, a_1 \in A, e \in E).$$

Khi đó (E', φ', F') là một bộ ba Kasparov chẵn.

(iii) Ký hiệu $E_{ess} = \overline{\varphi(A)E}$. Khi đó ánh xạ $\zeta : E' \rightarrow E_{ess}$ xác định bởi $\zeta(a \otimes_{\varphi} e) = \varphi(a)e$ là một đẳng cấu giữa các B, G -module Hilbert phân bậc. Ta định nghĩa một toán tử F_{ess} bởi sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccc} E' & \xrightarrow{F'} & E' \\ \uparrow \zeta^{-1} & & \downarrow \zeta \\ E_{ess} & \xrightarrow{F_{ess}} & E_{ess} \end{array}$$

nghĩa là $F_{ess} = \zeta F' \zeta^{-1}$ và $\varphi_{ess}(a) = \varphi(a)|_{E_{ess}}$ ($a \in A$). Khi đó $\mathcal{E}_{ess} = (E_{ess}, \varphi_{ess}, F_{ess})$ là một bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu. Hơn nữa bộ ba này là thuần nhất khi bộ ba Kasparov $\mathcal{E} = (E, \varphi, F)$ là thuần nhất.

Bổ đề sau đây của Thomsen (xem [61, Bổ đề 3.6]) sẽ mô tả mối quan hệ giữa bộ ba Kasparov chuẩn thuần nhất $\mathcal{E} = (E, \varphi, F)$ với bộ ba Kasparov chuẩn thuần nhất $\mathcal{E}_{ess} = (E_{ess}, \varphi_{ess}, F_{ess})$ mà ta vừa xây dựng trong Định lý 1.5 ở trên.

Bổ đề 1.1 ([61], Bổ đề 3.6). Cho $\mathcal{E} = (E, \varphi, F)$ là một bộ ba Kasparov chuẩn thuần nhất. Đặt

$$\mathcal{L}_1 = (E_{ess}, 0, F_{ess}) \oplus (E, \varphi, \widehat{1}) \oplus (E_{ess}, 0, \widehat{1}) \oplus (E, 0, \widehat{1}) \oplus (E_{ess}, \varphi_{ess}, \widehat{1})$$

và

$$\mathcal{L}_2 = (E, 0, F) \oplus (E, \varphi, \widehat{1}) \oplus (E_{ess}, 0, \widehat{1}) \oplus (E, \varphi, \widehat{1}) \oplus (E_{ess}, 0, \widehat{1}).$$

Khi đó

$$\mathcal{E} \oplus \mathcal{L}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}_{ess} \oplus \mathcal{L}_2.$$

Đặc trưng các phần tử trong KK-nhóm

Bổ đề 1.2. Cho A và B là các G -đại số, B là G -ổn định và A tách được. Khi đó tồn tại một $*$ -đồng cấu đẳng biến $\varphi : A \rightarrow M(B)$ sao cho $\overline{\varphi(A)B} = B$, trong đó $M(B)$ là đại số nhân tử⁵ của B .

Chứng minh. Theo [44, Chương 7] tồn tại cặp (π, u) trong đó $\pi : A \rightarrow \mathbb{B} = M(\mathbb{K})$ là một biểu diễn của A trên l_2 và $u : G \rightarrow \mathbb{B}$ là một biểu diễn unita không suy biến của G trên l_2 , tức thỏa mãn⁶

$$\overline{\pi(A)\mathbb{K}} = \mathbb{K} \quad (1.6)$$

và

$$Adu_g(\pi(a)) = u_g \pi(a) u_g^* = \pi(ga) \quad (g \in G, a \in A).$$

Gọi β là tác động của G trên B . Khi đó nhờ Mệnh đề 1.7, Phụ lục A.5 β được mở rộng thành tác động $\overline{\beta}$ liên tục theo tôpô chặt trong $M(B)$ của G trên $M(B)$. Do $\overline{\beta}$ và Adu lần lượt là các tác động của G trên $M(B)$ và $\mathbb{B}(l_2) = M(\mathbb{K})$ nên $\overline{\beta} \otimes Adu$ trở thành một tác động của G trên $M(B \otimes \mathbb{K}) = M(M(B) \otimes M(\mathbb{K}))$ theo công thức

$$(\overline{\beta} \otimes Adu)_g(b \otimes f) = \overline{\beta}_g(b) \otimes Adu_g(f) \quad (g \in G, b \in M(B), f \in M(\mathbb{K})).$$

Ta định nghĩa một ánh xạ $\pi_0 : (A, \alpha) \rightarrow (M(B \otimes \mathbb{K}), \overline{\beta} \otimes Adu)$ xác định bởi

$$\pi_0(a)(b \otimes f) = b \otimes \pi(a)f \quad (a \in A, b \in B, f \in M(\mathbb{K})).$$

Hiển nhiên π_0 là một $*$ -đồng cấu đẳng biến. Ngoài ra

⁵ Xem Phụ lục A.5

⁶ Nói cách khác biểu diễn π là không suy biến

$$\overline{\pi_0(A)(B \otimes K)} = \overline{B \otimes \pi(A)K} = B \otimes \overline{\pi(A)K}.$$

Kết hợp biểu thức trên với công thức (1.6) ta có

$$\overline{\pi_0(A)(B \otimes K)} = B \otimes K. \quad (1.7)$$

Do B là G -đại số G -ổn định nên áp dụng [61, Bổ đề 2.7] ta suy ra tồn tại một $*$ -đẳng cấu đẳng biến

$$\theta : (B \otimes K, \overline{\beta} \otimes Adu) \rightarrow (B, \beta).$$

Gọi $\overline{\theta} : M(B \otimes \mathbb{K}) \rightarrow M(B)$ là mở rộng liên tục theo tôpô chặt của θ . Ta định nghĩa ánh xạ φ xác định bởi sơ đồ giao hoán sau

$$\begin{array}{ccc} M(B \otimes \mathbb{K}) & \xrightarrow{\overline{\theta}} & M(B) \\ \uparrow \pi_0 & \nearrow \varphi & \\ A & & \end{array}$$

tức là $\varphi = \overline{\theta} \circ \pi_0$. Dễ dàng kiểm tra rằng φ là $*$ -đồng cấu đẳng biến. Theo Mệnh đề 1.8, Phụ lục A.5 thì $\overline{\theta}$ là một $*$ -đẳng cấu, do đó từ (1.7) ta suy ra $\overline{\theta}(\pi_0(A))(B) = B$ hay $\overline{\varphi(A)B} = B$. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Cuối cùng ta thu được các định lý sau đây là các kết quả chính của Thomsen[61] khi ông nghiên cứu tính ổn định của các phần tử của KK -nhóm.

Định lý 1.6. *Giả sử A và B là các G -đại số G -ổn định, A tách được. Khi đó*

- (i) Mọi phần tử của $KK_G^0(A, B)$ đều được đại diện bởi một bộ ba Kasparov chuẩn cơ bản, cốt yếu cho A và B .
- (ii) Hai bộ ba Kasparov chuẩn cơ bản, cốt yếu \mathcal{E}_1 và \mathcal{E}_2 cho A và B xác định cùng một phần tử thuộc $KK_G^0(A, B)$ khi và chỉ khi tồn tại các bộ ba Kasparov chuẩn suy biến cơ bản, cốt yếu \mathcal{D}_1 và \mathcal{D}_2 cho A và B sao cho

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{D}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{D}_2.$$

Chứng minh. (i) Giả sử $\psi \in KK_G^0(A, B)$ là một phần tử tùy ý, $\mathcal{E} \in \psi$ là một đại diện bất kỳ của ψ . Theo Định lý 1.4 tồn tại một bộ ba Kasparov chuẩn suy biến \mathcal{D} và một bộ ba Kasparov chuẩn thuần nhất \mathcal{E}_1 sao cho $\mathcal{E} \oplus \mathcal{D} \simeq \mathcal{E}_1$. Do \mathcal{D} suy biến nên $\mathcal{E}_1 \in \psi$.

Giả sử $\mathcal{E}_1 = (E, \varphi, F)$. Theo Bổ đề 1.1 tồn tại các bộ ba Kasparov suy biến \mathcal{L}_1 và \mathcal{L}_2 sao cho

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{L}_1 \sim_{OH} (E_{ess}, \varphi_{ess}, F_{ess}) \oplus \mathcal{L}_2. \quad (1.8)$$

Do \mathcal{L}_1 suy biến nên $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{L}_1 \in \psi$. Do vậy từ biểu thức (1.8) suy ra

$$(E_{ess}, \varphi_{ess}, F_{ess}) \oplus \mathcal{L}_2 \in \psi.$$

Từ đó ta có $\tau = (E_{ess}, \varphi_{ess}, F_{ess}) \in \psi$ do \mathcal{L}_2 suy biến, trong đó chú ý rằng τ là thuần nhất và cốt yếu.

Mặt khác từ Bổ đề 1.2 suy ra tồn tại một $*$ -đồng cấu $\pi : A \rightarrow M(B)$ sao cho $\overline{\pi(A)B} = B$. Nhờ đó bộ ba Kasparov chẵn

$$\mathcal{L} = (B^e, \pi \oplus \pi, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) \quad (1.9)$$

là suy biến và cốt yếu. Gọi E_{ess}^0 và E_{ess}^1 lần lượt là các B, G -module Hilbert con bao gồm các phần tử bậc 0 và bậc 1 của E_{ess} . Từ Định lý 1.2 ta có đẳng cấu giữa các B, G -module Hilbert sau đây

$$\begin{aligned} E_{ess} \oplus B^e &\simeq (E_{ess}^0 \oplus B) \oplus (E_{ess}^1 \oplus B) \\ &\simeq B^e. \end{aligned}$$

Giả sử $\zeta : E_{ess} \oplus B^e \rightarrow B^e$ là đẳng cấu giữa hai B, G -module Hilbert ở trên. Khi đó đặt

$$\mathcal{F} = \tau \oplus \mathcal{L} = (B^e, \zeta(\varphi_{ess} \oplus \pi \oplus \pi)\zeta^{-1}, \zeta(F_{ess} \oplus \widehat{1})\zeta^{-1}).$$

Do \mathcal{L} suy biến nên $\mathcal{F} \in \psi$. Hiển nhiên \mathcal{F} là một bộ ba Kasparov chẵn cơ bản.

Ta sẽ chứng minh nếu $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, F_1)$ là một bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu và đẳng cấu với bộ ba Kasparov chẵn $\mathcal{E}_2 = (E_2, \varphi_2, F_2)$ thì \mathcal{E}_2 cũng là một bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu. Thật vậy, giả sử $\zeta : E_1 \rightarrow E_2$ là đẳng cấu thỏa mãn $F_2 = \zeta \circ F_1 \circ \zeta^{-1}$, $\varphi_2(a) = \zeta \circ \varphi_1(a) \circ \zeta^{-1}$ ($a \in A$). Khi đó

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_2(a)(E_2)} &= \overline{\zeta \circ \varphi_1(a) \circ \zeta^{-1}(E_2)} \\ &= \overline{\zeta \circ \varphi_1(a)(E_1)} \\ &= \zeta(\overline{\varphi_1(a)(E_1)}) \\ &= \zeta(E_1) \\ &= E_2. \end{aligned}$$

Do τ và \mathcal{L} là các bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu nên từ chứng minh trên suy ra \mathcal{F} cũng là một bộ ba Kasparov chẵn cốt yếu. Vậy với mỗi phần tử ψ bất kỳ thuộc $KK_G^0(A, B)$ đều có một đại diện là một bộ ba Kasparov chẵn cơ bản và cốt yếu.

(ii) Giả sử hai bộ ba Kasparov chẵn cơ bản, cốt yếu \mathcal{E}_1 và \mathcal{E}_2 cho A và B xác định cùng một phần tử thuộc $KK_G^0(A, B)$. Từ Định nghĩa 1.8 suy ra tồn tại các bộ ba Kasparov chẵn suy biến \mathcal{D}_1 và \mathcal{D}_2 sao cho

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{D}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{D}_2.$$

Theo [61, Bổ đề 3.8] từ biểu thức trên ta suy ra

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1 \oplus (\mathcal{D}_1)_{ess} &\sim_{OH} (\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{D}_1)_{ess} \\ &\sim_{OH} (\mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{D}_2)_{ess} \\ &\sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus (\mathcal{D}_2)_{ess}. \end{aligned}$$

Do đó

$$\mathcal{E}_1 \oplus (\mathcal{D}_1)_{ess} \oplus \mathcal{L} \sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus (\mathcal{D}_2)_{ess} \oplus \mathcal{L}. \quad (1.10)$$

Với \mathcal{L} là bộ ba Kasparov chẵn xác định bởi công thức (1.9). Sử dụng Định lý 1.2 và lý luận tương tự như trong chứng minh của (i) ta suy ra $(\mathcal{D}_1)_{ess} \oplus \mathcal{L}$ là một bộ ba Kasparov chẵn suy biến cơ bản và cốt yếu. Do đó biểu thức (1.10) cho ta điều phải chứng minh. ■

1.3.2 Trường hợp lẻ

Phần này nghiên cứu tính ổn định trong trường hợp các bộ ba Kasparov lẻ. Bằng lập luận tương tự trường hợp chẵn ta cũng thu được kết quả ổn định cho trường hợp lẻ như trong trường hợp chẵn. Vì vậy chỉ những thay đổi so với trường hợp chẵn và kết quả chính của Thomsen[61, Mục 4] sẽ được trình bày.

Định nghĩa 1.11 (Bộ ba Kasparov lẻ). Một bộ ba Kasparov lẻ cho hai G -đại số A và B là một bộ ba đối tượng (E, φ, P) , trong đó E là một B, G -module Hilbert đếm được sinh, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến và P là một toán tử trong $\mathbb{L}_B(E)$ sao cho

$$(P^* - P)\varphi(a), (P^2 - P)\varphi(a), P\varphi(a) - \varphi(a)P, (g.P - P)\varphi(a) \in \mathbb{K}_B(E)$$

với mọi $a \in A$ và $g \in G$.

Tập hợp mọi bộ ba Kasparov lẻ cho hai G -đại số A và B được ký hiệu là $\mathbb{E}_G^1(A, B)$.

Bộ ba Kasparov lẻ (E, φ, P) được gọi là suy biến nếu

$$(P^* - P)\varphi(a) = (P^2 - P)\varphi(a) = P\varphi(a) - \varphi(a)P = (g.P - P)\varphi(a) = 0$$

với mọi $a \in A$ và $g \in G$.

Tập hợp các bộ ba Kasparov lẻ suy biến cho hai G -đại số A và B được ký hiệu là $\mathbb{D}_G^1(A, B)$.

Chú ý rằng các B, G -module Hilbert trong các bộ ba Kasparov lẻ là không phân bậc nên một số khái niệm cơ bản trên các bộ ba Kasparov lẻ sau đây có một số thay đổi so với trường hợp chẵn:

Hai bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, P_1)$ và $\mathcal{E}_2 = (E_2, \varphi_2, P_2)$ cho hai G -đại số A và B được gọi là *đẳng cấu* với nhau, ký hiệu là $\mathcal{E}_1 \simeq \mathcal{E}_2$, nếu tồn tại một đẳng cấu $\zeta : E_1 \rightarrow E_2$ giữa các B, G -module Hilbert sao cho $P_2 \circ \zeta = \zeta \circ P_1$ và $\varphi_2(a) \circ \zeta = \zeta \circ \varphi_1(a)$ ($a \in A$).

Hai bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{E}_0 = (E_0, \varphi_0, P_0)$ và $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, P_1)$ cho hai G -đại số A và B được gọi là *đồng luân toán tử* với nhau, ký hiệu là $\mathcal{E}_0 \sim_{OH} \mathcal{E}_1$, nếu tồn tại một họ các bộ ba Kasparov lẻ (E, φ, G_t) , $t \in [0, 1]$ cho A và B sao cho ánh xạ $[0, 1] \ni t \mapsto G_t$ liên tục theo chuẩn, (E, φ, G_0) đẳng cấu với (E_0, φ_0, P_0) và (E, φ, G_1) đẳng cấu với (E_1, φ_1, P_1) .

Tổng trực tiếp của hai bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{E}_1 = (E_1, \varphi_1, P_1)$ và $\mathcal{E}_2 = (E_2, \varphi_2, P_2)$ cho hai G -đại số A và B là bộ ba Kasparov $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 = (E_1 \oplus E_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2, P_1 \oplus P_2) = (E_1 \oplus E_2, \varphi_1 \oplus \varphi_2, P_1 \oplus P_2)$.

Định nghĩa 1.12 (Nhóm KK -lý thuyết đẳng biến lẻ). *Ta định nghĩa một quan hệ trên $\mathbb{E}_G^1(A, B)$ như sau: Hai bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2 \in \mathbb{E}_G^1(A, B)$ được gọi là có quan hệ \sim_{KK} với nhau, ta viết $\mathcal{E}_1 \sim_{KK} \mathcal{E}_2$, nếu tồn tại các bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2 \in \mathbb{D}_G^1(A, B)$ sao cho*

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{D}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{D}_2.$$

Do quan hệ \sim_{OH} là một quan hệ tương đương nên \sim_{KK} là một quan hệ tương đương trên $\mathbb{E}_G^1(A, B)$. Khi đó ta gọi $KK_G^1(A, B)$ là thương của $\mathbb{E}_G^1(A, B)$ đối với quan hệ tương đương \sim_{KK} , ta có

$$KK_G^1(A, B) = \mathbb{E}_G^1(A, B) / \sim_{KK} = \{\bar{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \in \mathbb{E}_G^1(A, B)\}$$

trong đó

$$\bar{\mathcal{E}} = \{\mathcal{F} \in \mathbb{E}_G^1(A, B) : \mathcal{F} \sim_{KK} \mathcal{E}\}.$$

Ta định nghĩa một phép toán cộng trên $KK_G^1(A, B)$ như sau: Với hai phần tử bất kỳ $\psi_1, \psi_2 \in KK_G^1(A, B)$, giả sử \mathcal{E}_1 và \mathcal{E}_2 là hai bộ ba Kasparov lẻ lần lượt thuộc ψ_1 và ψ_2 . Ta định nghĩa tổng của hai lớp ψ_1 và ψ_2 , ký hiệu là $\psi_1 + \psi_2$, là một lớp tương đương theo quan hệ \sim_{KK} với đại diện là bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2$. Do tổng hai bộ ba Kasparov lẻ suy biến là một bộ ba suy biến và nếu $\mathcal{E}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}'_1$, $\mathcal{E}_2 \sim_{OH} \mathcal{E}'_2$ thì $\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{E}_2 \sim_{OH} \mathcal{E}'_1 \oplus \mathcal{E}'_2$ với mọi $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}'_1, \mathcal{E}_2, \mathcal{E}'_2 \in \mathbb{E}_G^1(A, B)$, nên định nghĩa phép cộng như trên là xác định.

Định lý 1.7. $KK_G^1(A, B)$ là một nhóm giao hoán.

Chứng minh. Với $0 = \bar{\mathcal{D}}$ với $\mathcal{D} \in \mathbb{D}_G^1(A, B)$ là phần tử trung hòa của $KK_G^1(A, B)$. Xét phần tử bất kỳ $\bar{\mathcal{E}} \in KK_G^1(A, B)$, trong đó $\mathcal{E} = (E, \varphi, P) \in \mathbb{E}_G^1(A, B)$. Ký hiệu $-\mathcal{E} = (E, \varphi, -P)$. Ta sẽ chứng minh $\overline{-\mathcal{E}}$ là nghịch đảo của phần tử $\bar{\mathcal{E}}$. Thật vậy, xét họ các bộ ba Kasparov lẻ sau đây

$$\mathcal{E}_t = (E \oplus E, \begin{pmatrix} \varphi & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\cos t)P & \sin t \\ \sin t & (-\cos t)P \end{pmatrix})$$

với $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$. Do $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E} \oplus (-\mathcal{E})$ và $\mathcal{E}_{\pi/2} = (E \oplus E, \varphi \oplus \varphi, \hat{1}) \in \mathbb{D}_G^1(A, B)$ nên

$$\mathcal{E} \oplus (-\mathcal{E}) \sim_{OH} \mathcal{E}_{\frac{\pi}{2}}$$

và do đó $\overline{\mathcal{E}} + \overline{-\mathcal{E}} = 0$. Vì vậy $\overline{-\mathcal{E}}$ là nghịch đảo của $\overline{\mathcal{E}}$.

Việc kiểm tra $KK_G^1(A, B)$ thỏa mãn những điều kiện còn lại để trở thành một nhóm giao hoán là tầm thường. Vậy ta có điều phải chứng minh. \blacksquare

Một bộ ba Kasparov lẻ $\mathcal{E} = (E, \varphi, P)$ cho A và B được gọi là cơ bản nếu $E = B$ và cốt yếu nếu $\overline{\varphi(A)E} = E$. Với cách làm tương tự trường hợp chẵn Thomsen[61] đã thu được định lý sau đây

Định lý 1.8. *Giả sử A và B là các G -đại số G -ổn định, A tách được. Khi đó*

- (i) *Mọi phần tử của $KK_G^1(A, B)$ đều được đại diện bởi một bộ ba Kasparov lẻ cơ bản, cốt yếu cho A và B .*
- (ii) *Hai bộ ba Kasparov lẻ cơ bản, cốt yếu \mathcal{E}_1 và \mathcal{E}_2 cho A và B định nghĩa cùng một phần tử thuộc $KK_G^1(A, B)$ khi và chỉ khi tồn tại các bộ ba Kasparov lẻ suy biến cơ bản, cốt yếu \mathcal{D}_1 và \mathcal{D}_2 cho A và B sao cho*

$$\mathcal{E}_1 \oplus \mathcal{D}_1 \sim_{OH} \mathcal{E}_2 \oplus \mathcal{D}_2.$$

1.4 Đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến

Điểm xuất phát của đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến là một đối ngẫu của Paschke[43]. Năm 1981, Paschke đã chứng minh được rằng có tồn tại một đẳng cấu giữa $K_0(\pi(A)^c)$ và nhóm BDF -lý thuyết $Ext^{-1}(A)$ trong đó A là một C^* -đại số tách được và

$$\pi(A)^c = \{x \in \mathbb{Q} : x\pi(a) = \pi(a)x \quad \forall a \in A\}$$

là hoán tập⁷ trong đại số Calkin của ảnh $\pi(A)$ của A qua một mở rộng tầm thường π . Công trình này của Paschke sau đó đã được mở rộng bởi nhiều nhà toán học trong đó có Valette[62], Higson[25] và chính Thomsen[60]. Năm 2005, Thomsen[61] đã thành công trong việc xây dựng một đẳng cấu giữa một nhóm KK -lý thuyết đẳng biến của một cặp G -đại số với một nhóm K -lý thuyết của một C^* -đại số. Trong đó các giả thiết đặt lên các C^* -đại số trong công trình của Thomsen là khá “nhẹ”, các C^* -đại số không nhất thiết phải là các C^* -đại số hạt nhân, điều kiện mà toàn bộ lý thuyết của Kasparov cũng như các tác giả trước ông đều phải dùng đến.

⁷ Tiếng Anh: commutant

1.4.1 Đồng cấu hút đẳng biến

Khái niệm đồng cấu hút đẳng biến, một phát triển của khái niệm mở rộng hút trong lý thuyết mở rộng của các C^* -đại số (xem [4, Mục 12.15]) và tiếp đó là khái niệm đồng cấu hút của chính Thomsen (xem [60]), đóng vai trò quan trọng trong việc xây dựng đối ngẫu trong KK -lý thuyết đẳng biến của Thomsen.

Trước hết ta nhắc lại khái niệm một mạng G -bất biến tiệm cận. Cho X là một không gian định chuẩn với tác động của một nhóm G bởi các phép biến đổi tuyến tính trên X . Một mạng $\{x_\lambda\}_{\lambda \in A}$ trong X được gọi là G -bất biến tiệm cận nếu

$$\lim_{\lambda} (gx_\lambda - x_\lambda) = 0$$

trong đó sự hội tụ là đều trên mọi tập con compact của G .

Cho A và B là các G -đại số, A tách được và B ổn định. Nhờ [29, Bổ đề 1.3.2] và B là C^* -đại số ổn định nên tồn tại một dãy $\{S_i\}_1^\infty$ các đẳng cự G -bất biến trong $M(B)$ sao cho chuỗi $\sum_{i=1}^\infty S_i S_i^*$ hội tụ trong tôpô chặt và $\sum_{i=1}^\infty S_i S_i^* = 1$.

Định nghĩa 1.13. Một $*$ -đồng cấu đẳng biến $\pi : A \rightarrow M(B)$ được gọi là một đồng cấu bão hòa⁸ nếu tồn tại một phần tử unita G -bất biến $U \in M(B)$ sao cho

$$U\pi(a)U^* = \sum_{i=1}^\infty S_{2i}\pi(a)S_{2i}^* \quad (a \in A).$$

Trước khi định nghĩa khái niệm một $*$ -đồng cấu hút đẳng biến ta cần đến định lý sau đây

Định lý 1.9 ([61], Định lý 5.4). Cho A và B là các G -đại số G -ổn định, A tách được. Giả sử $\pi : A \rightarrow M(B)$ là một $*$ -đồng cấu đẳng biến bão hòa. Khi đó các điều kiện sau đây là tương đương

(i) Với mọi phép co đẳng biến hoàn toàn dương⁹ $\varphi : A \rightarrow M(B)$ đều tồn tại một dãy G -bất biến tiệm cận các phép co $\{W_n\} \subset M(B)$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\varphi(a) - W_n^* \pi(a) W_n\| = 0$$

với mọi $a \in A$.

(ii) Với mọi phép co đẳng biến hoàn toàn dương $\varphi : A \rightarrow M(B)$ đều tồn tại một dãy G -bất biến tiệm cận $\{V_n\}$ các đẳng cự trong $M(B)$ sao cho

⁸ Tiếng Anh: saturated

⁹ Xem Phụ lục A.3

- (1) $V_n^* \pi(a) V_n - \varphi(a) \in B$, $n \in \mathbb{N}$, $a \in A$,
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_n^* \pi(a) V_n - \varphi(a)\| = 0$, $a \in A$,
- (3) $g \cdot V_n - V_n \in B$ với mọi $n \in \mathbb{N}$ và $g \in G$.
- (iii) Với mọi phép co đẳng biến hoàn toàn dương $\varphi : A \rightarrow M(B)$ tồn tại một đường liên tục theo chuẩn và G -bất biến tiệm cận V_t , $t \in [1, \infty)$, các đẳng cự trong $M(B)$ sao cho
- (1) $V_t^* \pi(a) V_t - \varphi(a) \in B$, $t \in [1, \infty)$, $a \in A$,
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|V_t^* \pi(a) V_t - \varphi(a)\| = 0$, $a \in A$,
- (3) $g \cdot V_t - V_t \in B$ với mọi $t \in [1, \infty)$ và $g \in G$.
- (iv) Với mọi $*$ -đồng cấu đẳng biến $\varphi : A \rightarrow M(B)$ tồn tại một đường liên tục theo chuẩn và G -bất biến tiệm cận U_t , $t \in [1, \infty)$, các unita trong $M(B)$ sao cho
- (1) $U_t(\pi(a) \oplus \varphi(a))U_t^* - \pi(a) \in B$, $t \in [1, \infty)$, $a \in A$,
- (2) $\lim_{t \rightarrow \infty} \|U_t(\pi(a) \oplus \varphi(a))U_t^* - \pi(a)\| = 0$, $a \in A$,
- (3) $g \cdot U_t - U_t \in B$ với mọi $t \in [1, \infty)$ và với mọi $g \in G$.
- (v) Với mọi $*$ -đồng cấu đẳng biến $\varphi : A \rightarrow M(B)$ tồn tại một dãy G -bất biến tiệm cận $\{U_n\}$ các unita trong $M(B)$ sao cho

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|U_n(\pi(a) \oplus \varphi(a))U_n^* - \pi(a)\| = 0, a \in A.$$

Từ định lý trên ta có định nghĩa sau đây

Định nghĩa 1.14. Giả sử A và B là các G -đại số G -ổn định. Một $*$ -đồng cấu bảo hòa $\pi : A \rightarrow M(B)$ được gọi là hút đẳng biến nếu thỏa mãn một trong năm điều kiện của Định lý 1.9.

1.4.2 Đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến

Xây dựng đại số đối ngẫu \mathcal{D}_π^G

Với một cặp A và B là hai G -đại số G -ổn định, trong mục này ta sẽ xây dựng cụ thể đối ngẫu Thomsen cho cặp hai G -đại số này. Theo [61, Định lý 5.7] luôn tồn tại một $*$ -đồng cấu hút đẳng biến $\pi : A \rightarrow M(B)$. Đặt

$$\mathcal{A}_\pi = \{x \in M(B) : x\pi(a) - \pi(a)x \in B, a \in A\}$$

và

$$\mathcal{B}_\pi = \{x \in \mathcal{A}_\pi : x\pi(a) \in B, a \in A\}.$$

Mệnh đề 1.1. (i) \mathcal{A}_π là một C^* -đại số con của $M(B)$

(ii) \mathcal{B}_π là một ideal hai phía đóng trong \mathcal{A}_π .

Chứng minh. (i) Với $x, y \in \mathcal{A}_\pi$, khi đó dễ thấy $x + y \in \mathcal{A}_\pi$. Hơn nữa, với mọi $a \in A$ ta có

$$(xy)\pi(a) - \pi(a)(xy) = x[y\pi(a) - \pi(a)y] + [x\pi(a) - \pi(a)x]y \in M(B)B + BM(B) \subset B$$

và

$$x^*\pi(a) - \pi(a)x^* = [\pi(a^*)x - x\pi(a^*)]^* \in B.$$

Do đó xy và x^* thuộc \mathcal{A}_π . Do B đóng trong $M(B)$ nên \mathcal{A}_π đóng trong $M(B)$. Vậy \mathcal{A}_π là một C^* -đại số con của $M(B)$.

(ii) Dễ thấy \mathcal{B}_π là một C^* -đại số con của \mathcal{A}_π . Với $x \in \mathcal{B}_\pi$, $z \in \mathcal{A}_\pi$ và mọi $a \in A$ ta có

$$(zx)\pi(a) = z(x\pi(a)) \in M(B)B \subset B.$$

Do $z \in \mathcal{A}_\pi$ nên $t = z\pi(a) - \pi(a)z \in B$, từ đó

$$z\pi(a) = t + \pi(a)z.$$

Sử dụng công thức liên trên ta được

$$(xz)\pi(a) = xt + (x\pi(a))z \in M(B)B + BM(B) \subset B.$$

Vì vậy \mathcal{B}_π là một ideal hai phía đóng trong \mathcal{A}_π . ■

Đặt $\mathcal{D}_\pi = \mathcal{A}_\pi/\mathcal{B}_\pi$ và \mathcal{D}_π^G là C^* -đại số các phần tử trong \mathcal{D}_π bất biến dưới tác động của nhóm G . Mệnh đề sau đây khẳng định rằng C^* -đại số \mathcal{D}_π^G không phụ thuộc vào việc chọn $*$ -đồng cấu hút đẳng biến π (sai khác đẳng cấu).

Mệnh đề 1.2. Nếu $\pi, \tau : A \rightarrow M(B)$ là các $*$ -đồng cấu hút đẳng biến thì $\mathcal{D}_\pi \simeq \mathcal{D}_\tau$ và do đó $\mathcal{D}_\pi^G \simeq \mathcal{D}_\tau^G$.

Chứng minh. Trong chứng minh này với hai phần tử $x, y \in M(B)$ ta sẽ viết $x \sim_B y$ nếu $x - y \in B$. Với hai $*$ -đồng cấu đẳng biến $\varphi_1, \varphi_2 : A \rightarrow M(B)$, ta viết $\varphi_1 \sim \varphi_2$ nếu tồn tại một đường liên tục theo chuẩn G -bất biến tiệm cận W_t , $t \in [1, \infty)$, các unita trong $M(B)$ sao cho với mọi $t \in [1, \infty)$, $a \in A$, $g \in G$ ta có

$$W_t\varphi_1(a)W_t^* \sim_B \varphi_2(a), \tag{1.11}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} W_t\varphi_1(a)W_t^* = \varphi_2(a),$$

•

$$gW_t \sim_B W_t. \quad (1.12)$$

Do π và τ là các $*$ -đồng cấu hút đẳng biến nên từ Định lý 1.9/(iv) ta có

$$\pi \sim \pi \oplus \varphi \sim \varphi \oplus \pi \sim \varphi. \quad (1.13)$$

Từ (1.11), (1.12) và (1.13) ta suy ra tồn tại một phần tử unita $W \in M(B)$ sao cho

$$AdW \circ \pi(a) \sim_B \tau(a)$$

và

$$gW \sim_B W. \quad (1.14)$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{A}_\tau &\iff x\tau(a) \sim_B \tau(a)x \\ &\iff x(W\pi(a)W^*) \sim_B (W\pi(a)W^*)x \\ &\iff (W^*xW)\pi(a) \sim_B \pi(a)(W^*xW) \\ &\iff W^*xW \in \mathcal{A}_\pi. \end{aligned}$$

Kết hợp biểu thức liên trên với (1.14) suy ra ánh xạ $AdW^* : \mathcal{A}_\tau \rightarrow \mathcal{A}_\pi$ là một $*$ -đẳng cấu đẳng biến. Đồng thời do

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{B}_\tau &\iff x\tau(a) \sim_B \tau(a)x \sim_B 0 \\ &\iff x(W\pi(a)W^*) \sim_B (W\pi(a)W^*)x \sim_B 0 \\ &\iff (W^*xW)\pi(a) \sim_B \pi(a)(W^*xW) \sim_B 0 \\ &\iff AdW^* \circ x \in \mathcal{B}_\pi. \end{aligned}$$

Ánh xạ AdW^* cảm sinh một $*$ -đẳng cấu đẳng biến giữa \mathcal{D}_π và \mathcal{D}_τ và do đó cảm sinh một $*$ -đẳng cấu giữa \mathcal{D}_π^G và \mathcal{D}_τ^G . ■

Xây dựng đẳng cấu Θ giữa $K_1(\mathcal{D}_\pi^G)$ và $KK_G^0(A, B)$

Ta sẽ xây dựng một đồng cấu $\Theta : K_1(\mathcal{D}_\pi^G) \rightarrow KK_G^0(A, B)$. Ký hiệu $M_n(E)$ là C^* -đại số bao gồm các ma trận cấp n hệ số trong C^* -đại số E và $U_n(E)$ là tập hợp tất cả các phần tử unita trong $M_n(E)$. Với $u \in U_n(\mathcal{D}_\pi^G)$, tồn tại phần tử $v \in M_n(\mathcal{A}_\pi)$ sao cho

$$(id_{M_n(\mathbb{C})} \otimes p)(v) = u$$

trong đó $p : \mathcal{A}_\pi \rightarrow \mathcal{D}_\pi$ là ánh xạ chiếu mỗi phần tử trong \mathcal{A}_π vào lớp tương đương tương ứng trong \mathcal{D}_π . Định nghĩa một $*$ -đồng cấu $\pi^n : A \rightarrow \mathbb{L}_B(B^n)$ xác định bởi

$$\pi^n(a)(b_1, b_2, \dots, b_n) = (\pi(a)b_1, \pi(a)b_2, \dots, \pi(a)b_n) \quad (1.15)$$

với mọi $a \in A$ và $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in B^n$. Định nghĩa một ánh xạ phân bậc S trên $B^n \oplus B^n$ như sau: $S(x, y) = (x, -y)$ với mọi $x, y \in B^n$. Khi đó

$$\mathcal{E}_u = (B^n \oplus B^n, \begin{pmatrix} \pi^n & 0 \\ 0 & \pi^n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & v \\ v^* & 0 \end{pmatrix})$$

là một bộ ba Kasparov chặn cho A và B . Dễ thấy rằng cách xây dựng bộ ba Kasparov \mathcal{E}_u như vậy là độc lập với cách chọn phần tử v và lớp tương đương với đại diện \mathcal{E}_u trong $KK_G^0(A, B)$ chỉ phụ thuộc vào lớp của u trong $K_1(\mathcal{D}_\pi^G)$. Vì vậy ta định nghĩa được ánh xạ $\Theta : K_1(\mathcal{D}_\pi^G) \rightarrow KK_G^0(A, B)$ xác định bởi $\Theta(\bar{u}) = \overline{\mathcal{E}_u}$ với mọi $u \in U_n(\mathcal{D}_\pi^G)$. Định lý sau đây là chính là đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến

Định lý 1.10 ([61], Định lý 6.2). *Giả sử A và B là các G -đại số tách được G -ổn định. Khi đó ánh xạ $\Theta : K_1(\mathcal{D}_\pi^G) \rightarrow KK_G^0(A, B)$ là một đẳng cấu.*

Xây dựng đẳng cấu Θ_0 giữa $K_0(\mathcal{D}_\pi^G)$ và $KK_G^1(A, B)$

Với mỗi phép chiếu $Q \in M_n(\mathcal{D}_\pi^G)$, tồn tại phần tử $P \in M_n(\mathcal{A}_\pi)$ sao cho

$$(id_{M_n(\mathbb{C})} \otimes p)(P) = Q$$

trong đó $p : \mathcal{A}_\pi \rightarrow \mathcal{D}_\pi$ là ánh xạ chiếu mỗi phần tử trong \mathcal{A}_π vào lớp tương đương tương ứng trong \mathcal{D}_π . Với $\pi^n : A \rightarrow \mathbb{L}_B(B^n)$ là $*$ -đồng cấu đẳng biến định nghĩa bởi công thức (1.15) thì $\mathcal{E}_Q = (B^n, \pi^n, Q)$ là một bộ ba Kasparov lẻ. Dễ thấy rằng cách xây dựng bộ ba Kasparov \mathcal{E}_Q như vậy là độc lập với cách chọn phần tử P và lớp tương đương với đại diện \mathcal{E}_Q trong $KK_G^1(A, B)$ chỉ phụ thuộc vào lớp của Q trong $K_0(\mathcal{D}_\pi^G)$. Từ đó ta định nghĩa được ánh xạ $\Theta_0 : K_0(\mathcal{D}_\pi^G) \rightarrow KK_G^1(A, B)$ xác định bởi $\Theta_0(\overline{Q}) = \overline{\mathcal{E}_Q}$ với mọi phép chiếu $Q \in M_n(\mathcal{D}_\pi^G)$. Tương tự Định lý 1.10 Thomsen[61] đã chứng minh được đối ngẫu tiếp theo sau đây

Định lý 1.11 ([61], Định lý 6.3). *Giả sử A và B là các G -đại số tách được G -ổn định. Khi đó ánh xạ $\Theta_0 : K_0(\mathcal{D}_\pi^G) \rightarrow KK_G^1(A, B)$ là một đẳng cấu.*

1.4.3 Chứng minh KK -lý thuyết là tổng quát hóa của K -lý thuyết nhờ đối ngẫu Thomsen

Trong phần này ta sẽ chỉ làm việc với trường hợp nhóm G là tầm thường, tức KK -lý thuyết không đẳng biến. Trong lý thuyết cổ điển, người ta đã chứng minh được KK -lý

thuyết là một tổng quát hóa của K -lý thuyết qua đẳng cấu $KK^*(\mathbb{C}, B) \simeq K_*(B)$ nhờ sử dụng bức tranh Fredholm cho KK -lý thuyết (xem [4, Mục 17.5]). Việc chứng minh này rất phức tạp thậm chí ngay cả đối với trường hợp đơn giản nhất khi $A = B = \mathbb{C}$ (xem [4, Mục 17.3]). Mục đích của phần này là sử dụng đối ngẫu Thomsen (Các Định lý 1.10 và 1.11) để đưa ra một chứng minh khác cho đẳng cấu $KK^*(\mathbb{C}, B) \simeq K_*(B)$ với B là một σ -đại số bất kỳ. Trong phần này với U là một C^* -đại số ta sẽ luôn sử dụng các đồng nhất $\mathbb{K}_U(U) \simeq U$ và $\mathbb{L}_U(U) \simeq M(U)$ (xem Mệnh đề 1.20, Phụ lục B) khi cần thiết.

Định nghĩa 1.15. Cho A và B là hai C^* -đại số bất kỳ, E_1 và E_2 là các B -module Hilbert. Hai ánh xạ $\varphi_1 : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E_1)$ và $\varphi_2 : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E_2)$ được gọi là tương đương xấp xỉ và ký hiệu $\varphi_1 \sim_{ap} \varphi_2$ nếu tồn tại một dãy của các đẳng cự $W_n \in \mathbb{L}_B(E_2, E_1)$, $n = 1, 2, \dots$ sao cho với mọi $a \in A$, với mọi $n = 1, 2, \dots$ thì

- $W_n^* \varphi_1(a) W_n - \varphi_2(a) \in \mathbb{K}_B(E_2)$,
- $\lim_{i \rightarrow \infty} \|W_i^* \varphi_1(a) W_i - \varphi_2(a)\| = 0$.

Bổ đề 1.3 (Định lý Voiculescu-Kasparov[31]). Cho A là một C^* -đại số tách được và có đơn vị, B là một σ -đại số. Giả sử rằng A hoặc B là một C^* -đại số hạt nhân và tồn tại một $*$ -đơn cấu $\tau : A \rightarrow M(\mathbb{K})$. Ký hiệu $i : M(\mathbb{K}) \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$ là phép nhúng chuẩn tắc và $\pi = i \circ \tau : A \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$. Khi đó với mọi $*$ -đồng cấu unita¹⁰ $\varphi : \tau(A)/(\tau(A) \cap \mathbb{K}) \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$ thì $\varphi \oplus \pi : A \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K} \oplus B \otimes \mathbb{K})$ tương đương xấp xỉ với π .

Định lý 1.12. Nếu B là một σ -đại số thì ta có $KK^*(\mathbb{C}, B) \simeq K_*(B)$.

Chứng minh. Với một $*$ -đồng cấu giữa các C^* -đại số $\varphi : U \rightarrow M(T)$ và $x \in U$ ta sẽ ký hiệu $\varphi_x = \varphi(x)$. Định nghĩa một ánh xạ $\tau : \mathbb{C} \rightarrow M(\mathbb{K})$ như sau $\tau_x(k) = xk = x \cdot id_{\mathbb{K}}(k)$ với mọi $x \in \mathbb{C}$ và $k \in \mathbb{K}$. Do với mọi $e, f \in \mathbb{K}$ và $x \in \mathbb{C}$ ta có $(T_x e, f) = (xe, f) = \overline{x} e^* f = (e, \overline{x} f) = (e, T_{\overline{x}} f)$ nên $T_x^* = T_{\overline{x}}$. Từ đó dễ dàng kiểm tra rằng $\tau : \mathbb{C} \rightarrow M(\mathbb{K})$ là một $*$ -đơn cấu.

Giả sử rằng $\tau(\mathbb{C}) \cap \mathbb{K} \neq \{0\}$. Khi đó tồn tại $x \in \mathbb{C}$, $x \neq 0$ sao cho $\tau_x \in \mathbb{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$. Do $\tau_x = x \cdot id_{\mathbb{K}}$ nên $id_{\mathbb{K}} \in \mathbb{K}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K})$. Điều này mâu thuẫn với việc \mathbb{K} là C^* -đại số các toán tử compact trên không gian Hilbert vô hạn chiều l_2 nên không chứa phần tử đơn vị. Vì vậy ta có $\tau(\mathbb{C}) \cap \mathbb{K} = \{0\}$.

Khi đó với mọi $*$ -đồng cấu unita $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$, do $\tau(\mathbb{C})/\tau(\mathbb{C}) \cap \mathbb{K} = \tau(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}$ nên ta có thể giả sử φ là một $*$ -đồng cấu từ $\tau(\mathbb{C})/(\tau(\mathbb{C}) \cap \mathbb{K})$ vào $M(B \otimes \mathbb{K})$. Ký hiệu $i : M(\mathbb{K}) \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$ là phép nhúng chuẩn tắc, tức là $i_t(b \otimes k) = b \otimes i_t(k)$ với mọi $t, k \in \mathbb{K}$, $b \in B$ và ký hiệu $\pi = i \circ \tau : \mathbb{C} \rightarrow M(B \otimes \mathbb{K})$. Do \mathbb{C} là một C^* -đại số tách được,

¹⁰ Tức đồng cấu biến phần tử đơn vị trong C^* -đại số nguồn thành phần tử đơn vị trong C^* -đại số đích

có đơn vị và hạt nhân (nhờ Định lý 1.22, Phụ lục A.6) nên theo Bổ đề 1.3 thì $\varphi \oplus \pi$ tương đương xấp xỉ với π . Chú ý rằng với trường hợp không đẳng biến thì ta không cần đến điều kiện bão hòa để một đồng cấu là hút, xem [61, Mục 5] và [60], từ đó so sánh Định nghĩa 1.15 và Định lý 1.9 ta suy ra π là một đồng cấu hút.

Do $\pi = i \circ \tau$ nên $\pi_x(b \otimes k) = b \otimes xk$ với mọi $x \in \mathbb{C}, k \in \mathbb{K}$ và $b \in B$. Với $y \in M(B \otimes \mathbb{K}), b \otimes k \in B \otimes \mathbb{K}, x \in \mathbb{C}$ và giả sử $y(b \otimes k) = \sum_{i=1}^n b_i \otimes k_i$ thì

$$\begin{aligned} (y\pi_x)(b \otimes k) &= y(b \otimes xk) = xy(b \otimes k) \\ &= x\left(\sum_{i=1}^n b_i \otimes k_i\right) = \sum_{i=1}^n b_i \otimes xk_i \\ &= \sum_{i=1}^n \pi_x(b_i \otimes k_i) = \pi_x\left(\sum_{i=1}^n b_i \otimes k_i\right) \\ &= \pi_x y(b \otimes k). \end{aligned}$$

Do đó ta có

$$\mathcal{A}_\pi = \{y \in M(B \otimes \mathbb{K}) : y\pi_x - \pi_x y \in B \otimes \mathbb{K}, x \in \mathbb{C}\} = M(B \otimes \mathbb{K}).$$

Do với mọi $y \in M(B \otimes \mathbb{K})$ thì $y = y\pi_1$ nên

$$\mathcal{B}_\pi = \{y \in \mathcal{A}_\pi : y\pi_x \in B \otimes \mathbb{K}, x \in \mathbb{C}\} = B \otimes \mathbb{K}.$$

Vì vậy $\mathcal{D}_\pi = \mathcal{A}_\pi/\mathcal{B}_\pi = M(B \otimes \mathbb{K})/B \otimes \mathbb{K} = Q^s(B)$, đại số Calkin ổn định của B . Theo Định lý 1.10 và 1.11 ta có

$$KK^*(\mathbb{C}, B \otimes \mathbb{K}) = K_{*+1}(\mathcal{D}_\pi) = K_{*+1}(Q^s(B)). \quad (1.16)$$

Mặt khác theo [4, Hệ quả 17.8.8] ta có

$$KK^*(\mathbb{C}, B \otimes \mathbb{K}) \simeq KK^*(\mathbb{C}, B). \quad (1.17)$$

Mặt khác, theo [4, Hệ quả 12.2.3] ta có

$$K_{*+1}(Q^s(B)) = K_*(B). \quad (1.18)$$

So sánh các công thức (1.16), (1.17) và (1.18) ta có điều phải chứng minh. \blacksquare

Từ đó ta tính được các nhóm KK -lý thuyết ứng với trường hợp cặp C^* -đại số là tầm thường trong hệ quả sau đây

Hệ quả 1.1. • $KK^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{Z}$.

• $KK^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = 0$,

Chứng minh. Áp dụng Định lý 1.12 ta có

$$KK^*(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \simeq K_*(\mathbb{C}).$$

Do đó

$$KK^0(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \simeq K_0(\mathbb{C}) = \mathbb{Z}$$

và

$$KK^1(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \simeq K_1(\mathbb{C}) = 0.$$



Cấu trúc của C^* -đại số của không gian thuần nhất

2.1	Ý tưởng về khái niệm C^* -đại số của không gian thuần nhất	26
2.1.1	Không gian thuần nhất	26
2.1.2	C^* -đại số nhóm của một nhóm compact	27
2.1.3	Đơn giản hóa định nghĩa của $C^*(SU(m))$	28
2.1.4	C^* -đại số của không gian thuần nhất	30
2.2	Cấu trúc của các C^* -đại số của không gian thuần nhất	32

Chương này sẽ trình bày kết quả nghiên cứu chính của luận văn. Trong toàn bộ chương này nếu không có giải thích gì thêm ta luôn giả sử m , n và k là các số nguyên dương và \widehat{G} là vật đối ngẫu của một nhóm compact G , tức là tập tất cả các biểu diễn bất khả quy đôi một không tương đương của G .

2.1 Ý tưởng về khái niệm C^* -đại số của không gian thuần nhất

Để giải thích cho ý tưởng về C^* -đại số của các không gian thuần nhất, đối tượng được xem như các không gian thuần nhất không giao hoán, ta sẽ bắt đầu với việc nhắc lại khái niệm không gian thuần nhất cổ điển.

2.1.1 Không gian thuần nhất

Định nghĩa 2.16. *Giả sử G là một nhóm và X là một G -không gian trái, tức là X là một không gian cùng với một đồng cấu nhóm α từ G vào một nhóm các phép biến đổi của X và ta ký hiệu ngắn gọn $\alpha(g)(x) = g.x$ ($g \in G, x \in X$). Với điểm x bất kỳ thuộc X ta gọi tập hợp $\{g.x : g \in G\}$ là G -quỹ đạo của điểm x trong X . Khi đó X được gọi là một không*

gian thuần nhất nếu hai điểm bất kỳ của nó đều có G -quỹ đạo của điểm này đi qua điểm kia, tức là với mọi x và y trong X đều tồn tại $g \in G$ sao cho $x = g.y$.

Mệnh đề sau đây là then chốt cho ý tưởng về các C^* -đại số của không gian thuần nhất.

Mệnh đề 2.3. Cho G là một nhóm. Khi đó

(i) Nếu H là một nhóm con của G thì tập các lớp kề trái G/H của H trong G với tác động sau của nhóm G

$$g(kH) = (gk)H \quad (g \in G, k \in G) \quad (2.1)$$

là một không gian thuần nhất.

(ii) Mọi G -không gian trái thuần nhất X đều đẳng cấu với G -không gian trái G/H của các lớp kề trái của một nhóm con H nào đó của G trong G , với tác động (2.1) của G trên G/H .

Chứng minh. Dễ dàng kiểm tra được (i) là đúng. Ta sẽ chứng minh ý (ii). Cố định một phần tử $x \in X$, ký hiệu

$$G_x = \{g \in G : g.x = x\}.$$

Ta cũng dễ dàng kiểm tra được G_x là một nhóm con của G . Khi đó G_x được gọi là nhóm con dừng hay ổn định hóa của điểm x . Ký hiệu G/G_x là không gian các lớp kề trái của G_x trong G và với tác động (2.1) của G thì nó là một G -không gian trái thuần nhất. Vì X là thuần nhất nên với mọi $y \in X$ tồn tại $g_y \in G$ sao cho $y = g_y.x$. Khi đó ta định nghĩa được một ánh xạ h từ X vào G/G_x xác định bởi $h(y) = g_yG_x$.

Giả sử $y, z \in X$ sao cho $h(y) = h(z)$, hay $g_yG_x = g_zG_x$. Do đó với $g_y = g_y.e \in g_yG_x$, tồn tại $k \in G_x$ sao cho $g_y = g_z.k$. Khi đó $y = g_y.x = g_z.(k.x) = g_z.x = z$. Vì vậy h là một đơn ánh. Tính chất toàn ánh của h là hiển nhiên và do đó h là một song ánh. Mặt khác, $h(g.x) = gG_x = gh(x)$ với mọi $g \in G$ nên h là một đẳng cấu của các G -không gian trái X và G/G_x . Vì vậy ta có điều phải chứng minh. ■

2.1.2 C^* -đại số nhóm của một nhóm compact

Nếu G là một nhóm hữu hạn phần tử thì đại số nhóm $\mathbb{C}[G]$ có vai trò vô cùng quan trọng trong lý thuyết biểu diễn của nhóm G (chẳng hạn xem [50]). Tuy nhiên khi G không phải là một nhóm hữu hạn thì đại số nhóm đó không còn giữ vai trò quan trọng như trong trường hợp hữu hạn nữa. Một cách tự nhiên người ta cố gắng tổng quát hóa khái niệm của đại số nhóm $\mathbb{C}[G]$ và C^* -đại số nhóm $C^*(G)$ chính là lời giải. Người ta đã chứng minh được rằng mỗi biểu diễn unita của một nhóm compact địa phương G được

xác định duy nhất bởi một biểu diễn không suy biến của C^* -đại số nhóm $C^*(G)$ (xem [35, Mục 10.2]).

Bây giờ ta xây dựng khái niệm này cho trường hợp nhóm compact. Giả sử G là một nhóm compact và μ là một độ đo Haar trên G sao cho $\mu(G) = 1$. Ký hiệu $L^1(G)$ là tập các hàm nhận giá trị phức trên G sao cho $\int_G |f(z)|d\mu(z) < \infty$. Với các phép toán thông thường cộng hai hàm và nhân một số phức với một hàm thì $L^1(G)$ có cấu trúc một không gian véctơ phức. Với $f, g \in L^1(G)$ ta định nghĩa phép nhân, phép đối hợp và một chuẩn trên $L^1(G)$ như sau

- $(f * g)(k) = \int_G f(h)g(h^{-1}k)d\mu(h) \quad (k \in G),$
- $f^*(k) = \overline{f(k^{-1})} \quad (k \in G),$
- $\|f\|_{C^*} = \sup_{\pi \in \widehat{G}} \|\widehat{f}(\pi)\| = \sup_{\pi \in \widehat{G}} \left\| \int_G f(h)\pi(h)d\mu(h) \right\|$, trong đó \widehat{G} là vật đối ngẫu của G .

Dễ dàng kiểm tra được hàm $\|\cdot\|_{C^*}$ được định nghĩa ở trên là một C^* -chuẩn trên $L^1(G)$, tức là chuẩn thỏa mãn $\|f * f^*\| = \|f\|^2 \quad (f \in L^1(G))$. Vì vậy ta có định nghĩa sau

Định nghĩa 2.17. Bao đóng của $L^1(G)$ theo chuẩn này là một C^* -đại số và được gọi là C^* -đại số nhóm của nhóm G , ký hiệu là $C^*(G)$.

2.1.3 Đơn giản hóa định nghĩa của $C^*(SU(m))$

C^* -đại số sinh bởi một tập hợp các phần tử

Trước hết ta sẽ phát biểu khái niệm về một C^* -đại số con sinh bởi một tập các phần tử trong một C^* -đại số

Định nghĩa 2.18. Cho A là một C^* -đại số và S là một tập hợp con của A . Khi đó B được gọi là một C^* -đại số con của A sinh bởi S nếu B là C^* -đại số con bé nhất chứa S của A , tức là nếu D là một C^* -đại số con chứa S của A thì B là một C^* -đại số con của D .

Trong tự như các trường hợp cổ điển (vành con sinh bởi một tập, đại số con sinh bởi một tập,...), ta dễ dàng chứng minh mệnh đề sau đây

Mệnh đề 2.4. Giả sử B là một C^* -đại số con sinh bởi tập con S của C^* -đại số A . Ký hiệu

$$S^* = \{a^* : a \in S\}$$

và

$$\text{prod}(S) = \{a_1.a_2...a_n : a_i \in S \cup S^*, i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots\}.$$

Khi đó B là bao đóng theo chuẩn trong A của đại số con $\text{span}(\text{prod}(S))$, tức là bao tuyến tính của $\text{prod}(S)$.

Từ đó ta đi đến khái niệm sẽ được dùng sau này về C^* -đại số sinh bởi một tập hợp các phần tử của nó

Định nghĩa 2.19. Cho A là một C^* -đại số và S là một tập hợp con của A . Khi đó A được gọi là C^* -đại số sinh bởi S nếu C^* -đại số con sinh bởi tập S của A trùng với C^* -đại số A .

Đơn giản hóa nhờ định lý Peter-Weyl

Giả sử G là một nhóm compact, \widehat{G} là vật đối ngẫu của nhóm G , $T \in \widehat{G}$. Khi đó các hàm nhận giá trị phức trên G xác định bởi $T_{ij}(g) =$ phần tử ở vị trí hàng i cột j của ma trận $T(g)$, với $g \in G$, $1 \leq i, j \leq \dim T$, được gọi là các hàm hệ số ma trận của biểu diễn T . Ta có định lý sau là một hệ quả trực tiếp của định lý Peter-Weyl (chẳng hạn xem [55, Định lý 3.5, Chương 1]):

Định lý 2.13. Nếu G là một nhóm compact thì $C^*(G)$ được sinh bởi các hàm hệ số ma trận T_{ij}^α , $1 \leq i, j \leq \dim T^\alpha$, với mọi $T^\alpha \in \widehat{G}$.

Đơn giản hóa cho $C^*(SU(m))$

Nhắc lại $SU(m)$ là tập các ma trận phức A cấp m thỏa mãn $A^* = A^{-1}$ và có định thức bằng 1. Ký hiệu u_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m$) là các hàm hệ số ma trận của $SU(m)$, tức là các hàm nhận giá trị phức, được xác định như sau

$$u_{ij}(g) = g_{ij}$$

với mọi $g = (g_{ij})_{m \times m} \in SU(m)$.

Mệnh đề 2.5. Các hàm u_{ij} ($i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m$) là các hàm liên tục trên $SU(m)$.

Chứng minh. Giả sử $g^n = (g^n_{ij})_{m \times m}$ là dãy phần tử hội tụ đến phần tử $g = (g_{ij})_{m \times m}$ trong $SU(m)$. Khi đó g^n_{ij} cũng hội tụ đến g_{ij} với mọi $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, m$ khi n tiến ra vô cùng. Điều đó tương đương với $u_{ij}(g^n)$ hội tụ đến $u_{ij}(g)$ khi n tiến ra vô cùng. Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Định lý sau đây cho chúng ta một mô tả đơn giản hơn cho $C^*(SU(m))$:

Định lý 2.14. $C^*(SU(m))$ được sinh bởi các hàm hệ số ma trận u_{ij} , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, m$.

Chứng minh. Nhắc lại $U(m)$ là nhóm các ma trận phức A cấp m thỏa mãn $A^* = A^{-1}$ và gọi T là biểu diễn cơ bản của nhóm U_m , tức T là biểu diễn $T : U(m) \rightarrow Mat_m(\mathbb{C})$ xác định bởi $T(g) = g$ ($g \in U(m)$). Khi đó (xem [7, Mục 13.3]) với mọi biểu diễn $T^\alpha \in \widehat{SU(m)}$ đều tồn tại các số nguyên p, q sao cho T^α là một biểu diễn con của biểu diễn $\sum^{\oplus p} T^{\otimes q}$. Do T^α là một biểu diễn con của biểu diễn $\sum^{\oplus p} T^{\otimes q}$ nên tồn tại một ma trận phức cấp pm^q khả nghịch A sao cho với mọi $g \in SU(m)$ thì ma trận $A \sum^{\oplus p} T^{\otimes q}(g) A^{-1}$ có dạng

$$\begin{pmatrix} T^\alpha(g) & B(g) \\ O & C(g) \end{pmatrix}$$

trong đó O là ma trận không với cỡ phù hợp. Từ đó suy ra các hàm hệ số ma trận T_{ij}^α ($1 \leq i, j \leq \dim T^\alpha$, $T^\alpha \in \widehat{SU(m)}$) đều biểu diễn được qua các hàm u_{ij} ($1 \leq i, j \leq m$). Mặt khác, theo Định lý 2.13, $C^*(SU(m))$ được sinh bởi các hàm hệ số ma trận T_{ij}^α , $1 \leq i, j \leq \dim T^\alpha$, với mọi $T^\alpha \in \widehat{SU(m)}$. Vì vậy ta có điều phải chứng minh. \blacksquare

2.1.4 C^* -đại số của không gian thuần nhất

Không gian thuần nhất $SU(n+k)/SU(n)$

Ký hiệu $SU(n)_k$ là tập hợp các ma trận $g_k = (b_{ij})_{(n+k) \times (n+k)}$ được thiết lập từ ma trận $g = (a_{ij})_{n \times n} \in SU(n)$ nhờ các biểu thức sau

$$\begin{cases} b_{ii} = 1 & \text{nếu } i = 1, \dots, k \\ b_{ij} = 0 & \text{nếu } i \neq j \text{ và } i = 1, \dots, k \\ b_{ij} = 0 & \text{nếu } i \neq j \text{ và } j = 1, \dots, k \\ b_{ij} = a_{ij} & \text{nếu } i = k+1, \dots, n+k \text{ và } j = k+1, \dots, n+k. \end{cases}$$

hay nói cách khác

$$g_k = \begin{pmatrix} I_k & O \\ O & g \end{pmatrix}$$

trong đó I_k là ma trận đơn vị cấp k và O là các ma trận không có cỡ phù hợp. Dễ dàng kiểm tra rằng $SU(n)_k$ là một nhóm con của $SU(n+k)$ nhưng lại không là một nhóm con chuẩn tắc của $SU(n+k)$. Do đó $SU(n+k)/SU(n)_k$, tập hợp các lớp kề trái của nhóm $SU(n)_k$ trong nhóm $SU(n+k)$, nói chung không có cấu trúc một nhóm. Theo Mệnh đề 2.3 thì $SU(n+k)/SU(n)_k$ chính là một không gian thuần nhất. Từ nay ta sẽ ký hiệu không gian thuần nhất này là $SU(n+k)/SU(n)$.

Để giải thích cho tính tự nhiên của định nghĩa của các không gian thuần nhất không giao hoán, ta sẽ chứng minh định lý về cấu trúc của không gian thương $SU(n+k)/SU(n)$ sau đây

Định lý 2.15. Có một song ánh từ không gian thương $SU(n+k)/SU(n)$ vào không gian gồm k khung

$$\vec{e}_j = (u_{1j}, u_{2j}, \dots, u_{(n+k)j}) \quad j = 1, \dots, k$$

trong đó

$$\sum_{i=1}^{n+k} \overline{u_{ij}} u_{il} = \delta_{jl} \quad \forall j, l \in \{1, \dots, k\}.$$

Chứng minh. Giả sử $U = (u_{ij})_{(n+k) \times (n+k)}$ và $V = (v_{ij})_{(n+k) \times (n+k)}$ là hai ma trận trong $SU(n+k)$ sao cho $U^{-1}V \in SU(n)_k$, tức là U và V thuộc cùng một lớp kề trái của $SU(n)_k$ trong $SU(n+k)$. Ta sẽ chỉ ra rằng k cột đầu tiên của U và V trùng nhau và từ đó ta có điều phải chứng minh.

Thật vậy, giả sử $U^{-1}V = (\overline{U})^T V = (c_{ij})_{(n+k) \times (n+k)}$, khi đó

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n+k} \overline{u_{si}} v_{sj}$$

với mọi i, j chạy từ 1 đến $n+k$. Do $U^{-1}V = SU(n)_k$ nên

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n+k} \overline{u_{si}} v_{sj} = \delta_{ij} \quad (2.2)$$

với mọi j chạy từ 1 đến k . Mặt khác

$$\sum_{s=1}^{n+k} \overline{u_{si}} u_{sj} = \delta_{ij} \quad (2.3)$$

với mọi i, j chạy từ 1 đến $n+k$. Đặt $h_{sj} = v_{sj} - u_{sj}$ với $s = 1, \dots, n+k$ và $j = 1, \dots, k$. Nhờ (2.2) và (2.3) nên ta có

$$\sum_{s=1}^{n+k} \overline{u_{si}} h_{sj} = 0 \quad (i = 1, \dots, n+k; j = 1, \dots, k). \quad (2.4)$$

Coi hệ đẳng thức (2.4) trên là hệ $k(n+k)$ phương trình tuyến tính thuần nhất với các ẩn h_{sj} ($s = 1, \dots, n+k; j = 1, \dots, k$). Nếu ta sắp thứ tự của ẩn là

$$h_{11}, h_{21}, \dots, h_{(n+k)1}, h_{12}, h_{22}, \dots, h_{(n+k)2}, \dots, h_{1k}, h_{2k}, \dots, h_{(n+k)k}$$

thì ma trận hệ số của hệ (2.4) có dạng

$$\begin{pmatrix} U^{-1} & O & \dots & O \\ O & U^{-1} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ O & O & \dots & U^{-1} \end{pmatrix}.$$

Ma trận này có định thức bằng $\det(U^{-1})^k = 1$ nên hệ có duy nhất một nghiệm tầm thường

$$h_{sj} = 0 \quad (s = 1, \dots, n+k; j = 1, \dots, k).$$

Do đó

$$u_{sj} = v_{sj} \quad (s = 1, \dots, n+k; j = 1, \dots, k).$$

Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

Các không gian thuần nhất không giao hoán

Xuất phát từ ý tưởng của nhóm lượng tử ma trận của Woronowicz[64], ý tưởng về các C^* -đại số nhóm biến đổi¹[42], dựa trên Định lý 2.14 về cấu trúc thu gọn của C^* -đại số $C^*(SU(m))$ và Định lý 2.15 về cấu trúc của không gian thuần nhất $SU(n+k)/SU(n)$, chúng tôi đề xuất các khái niệm sau đây

Định nghĩa 2.20. Khi $k \geq 1$, C^* -đại số con sinh bởi các hàm u_{ij} với $i = 1, 2, \dots, n+k$ và $j = 1, 2, \dots, k$ trong $C^*(SU(n+k))$ được gọi là C^* -đại số của không gian thuần nhất $SU(n+k)/SU(n)$ hoặc không gian thuần nhất không giao hoán tương ứng với $SU(n+k)/SU(n)$ và được ký hiệu là $C^*(SU(n+k)/SU(n))$.

Do không gian con của một không gian thuần nhất là một không gian thuần nhất nên một C^* -đại số con, ta sẽ định nghĩa dưới đây, của C^* -đại số $C^*(SU(n+k)/SU(n))$ được coi như tương ứng với một không gian thuần nhất nào đó và do đó được xem là một không gian thuần nhất không giao hoán.

Định nghĩa 2.21 (Không gian thuần nhất không giao hoán $C_{n,k}^*$). C^* -đại số con sinh bởi các hàm u_{ij} với $i = 1, 2, \dots, k$ và $j = 1, 2, \dots, k$ trong $C^*(SU(n+k))$ được ký hiệu là $C_{n,k}^*$.

2.2 Cấu trúc của các C^* -đại số của không gian thuần nhất

Ta bắt đầu bằng việc chứng minh rằng biểu diễn cơ bản của nhóm $SU(m)$ là một biểu diễn unita bất khả quy. Ý tưởng chứng minh của bổ đề này là coi biểu diễn cơ bản là một trường hợp riêng trong các biểu diễn của $SU(m)$ lên không gian vectơ các đa thức thuần nhất m biến rồi chứng minh biểu diễn này là bất khả quy.

¹ Tiếng Anh: Transformation group C^* -algebras

Bổ đề 2.4. Biểu diễn cơ bản của nhóm $SU(m)$, tức biểu diễn $F : SU(m) \rightarrow Mat_n(\mathbb{C})$ xác định bởi $F(g) = g$ ($g \in SU(m)$), là một biểu diễn unita bất khả quy của nhóm $SU(m)$.

Chứng minh. Tính unita của biểu diễn cơ bản của $SU(m)$ là hiển nhiên, ta sẽ xem xét tính bất khả quy của biểu diễn này.

Ký hiệu V là không gian vectơ con các đa thức thuần nhất bậc 1 của $\mathbb{C}[z_1, z_2, \dots, z_m]$ và

$$zg = \left((z_1 z_2 \dots z_m) \begin{pmatrix} g_{11} \\ g_{21} \\ \dots \\ g_{m1} \end{pmatrix}, \dots, (z_1 z_2 \dots z_m) \begin{pmatrix} g_{1m} \\ g_{2m} \\ \dots \\ g_{mm} \end{pmatrix} \right)$$

với mọi $z = (z_1, z_2, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$ và $g \in SU(m)$.

Ta định nghĩa ánh xạ $U : SU(m) \rightarrow Aut(V)$ xác định bởi $U(g)(\varphi)(z) = \varphi(zg)$ với mọi $g \in SU(m)$ và $z \in \mathbb{C}^n$. Tương tự trường hợp $m = 2$ dễ dàng kiểm tra được U là một biểu diễn liên tục của $SU(m)$.

Ta có nhận xét rằng các ma trận của biểu diễn cơ bản của nhóm $SU(m)$ chính là các ma trận của biểu diễn U theo cơ sở $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ trong đó $\varphi_i(z) = z_i$ $i = 1, \dots, m$, $z = (z_1, \dots, z_m)$. Thật vậy, ta có

$$U(g)(\varphi_i)(z) = \varphi_i(zg) = g_{1i}\varphi_1(z) + g_{2i}\varphi_2(z) + \dots + g_{mi}\varphi_m(z)$$

với mọi $i = 1, 2, \dots, m$ và $g \in SU(m)$. Biểu thức trên thể hiện rằng ma trận của $U(g)$ đối với cơ sở $\{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$ chính là ma trận g và do đó để chứng minh biểu diễn cơ bản là bất khả quy ta cần chứng minh biểu diễn U là bất khả quy. Chú ý rằng trường hợp $m = 2$ đã được chứng minh trong lý thuyết cổ điển (xem [55, Định lý 1.1, Chương 2]), ta chỉ xét trường hợp $m \geq 3$.

Giả sử ma trận A thỏa mãn $AU(g) = U(g)A$ với mọi $g \in SU(m)$. Xét các ma trận có dạng

$$h = \begin{pmatrix} h_1 & O \\ & \ddots \\ O & h_n \end{pmatrix} \in SU(m) \quad (2.5)$$

tức là các ma trận có dạng đường chéo như trên và thỏa mãn

$$\begin{cases} h_1 h_2 \dots h_m = 1 \\ |h_i|^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, m). \end{cases}$$

Khi đó với một số k cố định, $1 \leq k \leq m$, ta có

$$U(g)A(\varphi_k)(z) = AU(g)(\varphi_k)(z) = A(\varphi_k)(zh) = h_k A\varphi_k(z) \quad (2.6)$$

với mọi h có dạng (2.5).

Ta có nhận xét rằng $\varphi \in V$ mà thỏa mãn $U(g)(\varphi) = h_k \varphi$ với mọi h có dạng (2.5) khi và chỉ khi φ tỉ lệ với φ_k . Thật vậy, giả sử φ tỉ lệ với φ_k , tức là tồn tại hằng số t_k sao cho $\varphi = t_k \varphi_k$ thì ta có

$$U(g)(\varphi) = U(g)(t_k \varphi_k) = t_k U(g)(\varphi_k) = t_k h_k \varphi_k = h_k \varphi.$$

Ngược lại, giả sử $\varphi \in V$ và thỏa mãn $U(g)\varphi = h_k \varphi$ với mọi h có dạng (2.5). Vì $\varphi \in V$ nên φ có dạng $\varphi = a_1 \varphi_1 + a_2 \varphi_2 + \dots + a_m \varphi_m$. Khi đó

$$U(h)(\varphi)(z) = \varphi(zh) = a_1 h_1 z_1 + a_2 h_2 z_2 + \dots + a_m h_m z_m.$$

Mặt khác

$$U(g)(\varphi)(z) = h_k \varphi(z) = a_1 h_k z_1 + a_2 h_k z_2 + \dots + a_m h_k z_m.$$

Từ hai biểu thức liền trên ta có

$$(h_1 - h_k) a_1 z_1 + \dots + (h_{k-1} - h_k) a_{k-1} z_{k-1} + (h_{k+1} - h_k) a_{k+1} z_{k+1} + \dots + (h_m - h_k) a_m z_m = 0.$$

Từ biểu thức trên, chọn h có dạng (2.5) sao cho $h_k \neq h_i$ với mọi $i \neq k$, ta suy ra $a_i = 0$ với mọi $i \neq k$ và do đó $\varphi = a_k \varphi_k$.

Nhờ nhận xét trên và biểu thức (2.6) ta suy ra tồn tại các hằng số c_k sao cho

$$A(\varphi_k) = c_k \varphi_k \quad (k = 1, 2, \dots, m).$$

Bây giờ ta sẽ chứng minh tất cả các hằng số c_k ($k = 1, 2, \dots, m$) ở trên bằng nhau. Thật vậy, với $g = (g_{ij})_{m \times m} \in SU(m)$ ta có

$$\begin{aligned} AU(g)(\varphi_1)(z) &= A(\varphi_1)(zg) \\ &= A(g_{11}z_1 + \dots + g_{m1}z_m) \\ &= g_{11}c_1z_1 + \dots + g_{m1}c_mz_m. \end{aligned}$$

Mặt khác ta có

$$\begin{aligned} U(g)A(\varphi_1)(z) &= U(g)(c_1\varphi_1)(z) \\ &= c_1\varphi_1(zg) \\ &= g_{11}c_1z_1 + \dots + g_{m1}c_1z_m. \end{aligned}$$

So sánh hai biểu thức liền trên và do tính giao hoán giữa A và $U(g)$ ta có

$$(c_2 - c_1)g_{21}z_2 + (c_3 - c_1)g_{31}z_3 + \dots + (c_m - c_1)g_{m1}z_m = 0. \quad (2.7)$$

Ký hiệu I là ma trận đơn vị cấp m . Với mỗi số k , $2 \leq k \leq m$, ta xây dựng một ma trận ${}_k I$ từ ma trận I như sau:

- Bước 1: Đổi hàng 1 và hàng k của ma trận I thu được ma trận I' .
- Bước 2: Trong các hàng $1, 2, \dots, k-1, k+1, \dots, m$ của ma trận I' thực hiện một lần đổi giữa hai hàng bất kỳ và ta thu được ma trận ${}_kI$. Chú ý rằng vì $m \geq 3$ nên số các hàng còn lại (trừ hàng thứ k) trong ma trận I' là lớn hơn hoặc bằng 2 và do đó thực hiện được bước 2.

Ma trận ${}_kI$ thu được có các tính chất sau:

- Unita: Do ma trận ${}_kI$ thu được từ ma trận I chỉ bằng các phép đổi hàng nên ${}_kI$ vẫn là ma trận unita.
- Định thức bằng 1: Do ma trận ${}_kI$ thu được từ ma trận I bằng hai phép đổi hàng nên $\det({}_kI) = \det(I) = 1$.

Do đó ${}_kI \in SU(m)$ ($k = 2, \dots, m$). Thay ma trận g trong công thức (1.20) lần lượt bởi các ma trận ${}_kI$ ($k = 2, \dots, m$) ta được

$$c_k = c_1 \quad (k = 2, \dots, m).$$

Vậy ta đã chứng minh được $A = c_1 I$. Theo [55, Định lý 2.1] thì U là bất khả quy và do đó biểu diễn cơ bản của $SU(m)$ là bất khả quy. ■

Giả sử G là một nhóm compact. Ký hiệu $L^2(G)$ là không gian véctơ các hàm f nhận giá trị phức trên G sao cho

$$\int_G |f(k)|^2 d\mu(k) < \infty.$$

Với hai hàm $f, g \in L^2(G)$, ta định nghĩa một tích vô hướng trên $L^2(G)$ như sau

$$(f, g) = \int_G f(k) \overline{g(k)} d\mu(k). \quad (2.8)$$

Từ Bổ đề 2.4 ta thu được bổ đề sau

Bổ đề 2.5. *Giả sử u_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$) là các hàm hệ số ma trận của nhóm $SU(m)$. Khi đó ta có đẳng thức sau*

$$(u_{ij}, u_{st}) = \frac{1}{m} \delta_{is} \delta_{jt} \quad (i, j, s, t \in \{1, 2, \dots, m\}).$$

Chứng minh. Theo [55, Định lý 3.2], với mọi biểu diễn bất khả quy $T^\alpha, T^\beta \in \widehat{SU(m)}$ ta có

$$(T_{ij}^\alpha, T_{st}^\beta) = \begin{cases} \frac{1}{\dim T^\alpha} \delta_{is} \delta_{jt} & \text{nếu } \alpha = \beta \\ 0 & \text{nếu } \alpha \neq \beta. \end{cases} \quad (2.9)$$

Nhờ Bổ đề 2.4 ta suy ra biểu diễn cơ bản là một phần tử của vật đối ngẫu $\widehat{SU(m)}$. Do các hàm u_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$) cũng chính là các hàm hệ số ma trận của biểu diễn cơ bản, hơn nữa chiều của biểu diễn cơ bản là m nên áp dụng công thức (2.9) ta có điều phải chứng minh. \blacksquare

Bổ đề 2.6. Giả sử u_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, m$) là các hàm hệ số ma trận của nhóm $SU(m)$. Khi đó với mọi $i, j, s, t \in \{1, 2, \dots, m\}$ ta có

- (i) $u_{ij}^* = u_{ji}$,
- (ii) $u_{ij} * u_{st} = \frac{1}{n} u_{it} \delta_{sj}$,
- (iii) $u_{ij} = m(u_{ik} * u_{kj})$ với k bất kỳ thuộc tập $\{1, 2, \dots, m\}$.

Chứng minh. (i) Với mọi $g \in SU(m)$ và $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ ta có

$$\begin{aligned} u_{ij}^*(g) &= \overline{u_{ij}(g^{-1})} \\ &= \overline{u_{ij}(g^*)} \\ &= g_{ji} \\ &= u_{ji}(g). \end{aligned}$$

(ii) Với mọi $g \in SU(m)$ và $i, j, s, t \in \{1, 2, \dots, m\}$ ta có

$$\begin{aligned} (u_{ij} * u_{st})(g) &= \int_S U(m) u_{ij}(h) u_{st}(h^{-1}g) d\mu(h) \\ &= \int_{SU(m)} h_{ij} u_{st}(h^*g) d\mu(h) \\ &= \int_{SU(m)} h_{ij} \overline{(h_{1s} h_{2s} \dots h_{ms})} \begin{pmatrix} g_{1t} \\ g_{2t} \\ \vdots \\ g_{mt} \end{pmatrix} d\mu(h) \\ &= \int_{SU(m)} h_{ij} \sum_{l=1}^m \overline{h_{ls}} g_{lt} d\mu(h) \\ &= \sum_{l=1}^m g_{lt} \int_{SU(m)} h_{ij} \overline{h_{ls}} d\mu(h) \\ &= \sum_{l=1}^m g_{lt} \int_{SU(m)} u_{ij}(h) \overline{u_{ls}(h)} d\mu(h) \\ &= \sum_{l=1}^m g_{lt} (u_{ij}, u_{ls}). \end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.5 ta được

$$\begin{aligned} (u_{ij} * u_{st})(g) &= \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m g_{il} \delta_{lj} \\ &= \frac{1}{m} g_{it} \delta_{js} \\ &= \frac{1}{m} u_{it}(g) \delta_{js}. \end{aligned}$$

(iii) Ý (iii) được suy trực tiếp từ ý (ii) bằng cách cho $s = j$. ■

Nhờ 3 bổ đề trên ta thu được định lý đơn giản hóa cấu trúc của C^* -đại số $C^*(SU(m))$, mạnh hơn sự đơn giản hóa đã được chứng minh trong Định lý 2.14, sau đây

Định lý 2.16. C^* -đại số $C^*(SU(m))$ được sinh bởi các hàm phần tử ma trận u_{is} ($i = 1, 2, \dots, m$) và u_{sj} ($j = 1, 2, \dots, m$) với s là một số cố định bất kỳ thuộc tập $\{1, 2, \dots, m\}$.

Chứng minh. Giả sử s là một số thuộc tập $\{1, 2, \dots, m\}$. Theo Định lý 2.14 C^* -đại số $C^*(SU(m))$ được sinh bởi các hàm phần tử ma trận u_{ij} ($1 \leq i, j \leq m$). Mặt khác theo Bổ đề 2.6 mọi hàm u_{ij} ($1 \leq i, j \leq m$) đều được sinh bởi các hàm phần tử ma trận u_{is} ($i = 1, 2, \dots, m$) và u_{sj} ($j = 1, 2, \dots, m$). Vậy ta có điều phải chứng minh. ■

C^* -đại số $C_{n,k}^*$ là một C^* -đại số con nhưng nói chung không là một ideal của C^* -đại số $C^*(SU(n+k))$. Tuy nhiên trong mục này chúng tôi sẽ chứng minh $C_{n,k}^*$ mang một cấu trúc yếu hơn ideal, cụ thể nó là một C^* -đại số con di truyền của $C^*(SU(n+k))$. Từ đó chứng minh được C^* -đại số $C_{n,k}^*$ là một AF -đại số và do đó thu được một số mô tả ở mức độ K -lý thuyết của nó.

Trước hết ta sẽ nhắc lại khái niệm C^* -đại số con di truyền (xem [44, Mục 1.5]).

Định nghĩa 2.22 (C^* -đại số con di truyền). Cho A là một C^* -đại số và A_+ là tập các phần tử dương (Xem Phụ lục A.2) trong A . Một tập con M của A_+ được gọi là tập con di truyền của A nếu với mọi $x \in A$ và $y \in M$ thỏa mãn $0 \leq x \leq y$ thì suy ra $x \in M$. Một C^* -đại số con B của A được gọi là C^* -đại số con di truyền của A nếu B_+ là tập con di truyền của A_+ .

Trên C^* -đại số $C^*(SU(n+k))$ ta định nghĩa một hàm $p : SU(n+k) \rightarrow \mathbb{C}$ xác định bởi

$$p(g) = (n+k) \sum_{i=1}^k g_{ii} = (n+k) \sum_{i=1}^k u_{ii}(g) \quad (2.10)$$

trong đó $g = (g_{ij})_{(n+k) \times (n+k)} \in SU(n+k)$ và u_{ii} ($i = 1, 2, \dots, n+k$) là các hàm hệ số ma trận của nhóm $SU(n+k)$. Chú ý rằng do các hàm u_{ii} ($i = 1, 2, \dots, k$) là các phần tử thuộc C^* -đại số $C^*(SU(n+k))$ nên p cũng là một phần tử thuộc $C^*(SU(n+k))$.

Bổ đề 2.7. Hàm p định nghĩa bởi công thức (2.10) là một phép chiếu trong C^* -đại số $C^*(SU(n+k))$, tức p là phần tử tự liên hợp của $C^*(SU(n+k))$ và thỏa mãn $p * p = p$.

Chứng minh. Theo Bổ đề 2.6 ta có

$$p^* = (n+k) \sum_{i=1}^k u_{ii}^* = (n+k) \sum_{i=1}^k u_{ii} = p.$$

Do đó p là phần tử tự liên hợp của $C^*(SU(n+k))$. Gọi μ là độ đo Haar trên $SU(n+k)$ sao cho $\mu(SU(n+k)) = 1$, khi đó với mọi $g = (g_{ij})_{(n+k) \times (n+k)} \in SU(n+k)$ ta có

$$(p * p)(g) = \int_{SU(n+k)} p(h)p(h^{-1}g)d\mu(h). \quad (2.11)$$

Do $h \in SU(n+k)$ là ma trận unita nên

$$\begin{aligned} u_{ij}(h^{-1}g) &= (\overline{h_{1i}h_{2i}\dots h_{(n+k)i}}) \begin{pmatrix} g_{1j} \\ g_{2j} \\ \vdots \\ g_{(n+k)j} \end{pmatrix} \\ &= \sum_{s=1}^{n+k} \overline{h_{si}} g_{sj} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n+k). \end{aligned}$$

Do đó

$$u_{ii}(h^{-1}g) = \sum_{s=1}^{n+k} \overline{h_{si}} g_{si} \quad (i = 1, 2, \dots, n+k). \quad (2.12)$$

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} p(h)p(h^{-1}g) &= (n+k)^2 \sum_{t=1}^k h_{tt} \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} \overline{h_{si}} g_{si} \\ &= (n+k)^2 \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{si} \sum_{t=1}^k h_{tt} \overline{h_{si}}. \end{aligned}$$

Thay vào công thức (2.11) ta được

$$\begin{aligned} (p * p)(g) &= (n+k)^2 \int_{SU(n+k)} \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{si} \sum_{t=1}^k h_{tt} \overline{h_{si}} d\mu(h) \\ &= (n+k)^2 \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{si} \sum_{t=1}^k \int_{SU(n+k)} h_{tt} \overline{h_{si}} d\mu(h) = (n+k)^2 \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{si} \sum_{t=1}^k (u_{tt}, u_{si}). \end{aligned}$$

trong đó (\cdot, \cdot) là tích vô hướng trên $L^2(SU(n+k))$ định nghĩa bởi công thức (2.8). Áp dụng Bổ đề 2.5 ta được

$$\begin{aligned} (p * p)(g) &= (n+k)^2 \sum_{i=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{si} \sum_{t=1}^k \frac{1}{n+k} \delta_{ts} \delta_{ti} \\ &= (n+k) \sum_{i=1}^k g_{ii} \\ &= p(g). \end{aligned}$$

Do đó $p * p = p$ và ta có điều phải chứng minh. ■

Bổ đề 2.8. $C_{n,k}^* = pC^*(SU(n+k))p = \{p * a * p : a \in C^*(SU(n+k))\}$.

Chứng minh. Với $g \in SU(n+k)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n+k\}$ và μ là độ đo Haar trên $SU(n+k)$ thỏa mãn $\mu(SU(n+k)) = 1$, ta có

$$\begin{aligned} (u_{ij} * p)(g) &= (n+k) \int_{SU(n+k)} u_{ij}(h) p(h^{-1}g) d\mu(h) \\ &= (n+k) \int_{SU(n+k)} h_{ij} \sum_{l=1}^k u_{ll}(h^{-1}g) d\mu(h). \end{aligned}$$

Nhờ công thức (2.12) ta có

$$\begin{aligned} (u_{ij} * p)(g) &= (n+k) \int_{SU(n+k)} h_{ij} \sum_{l=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} \overline{h_{sl}} g_{sl} d\mu(h) \\ &= (n+k) \sum_{l=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{sl} \int_{SU(n+k)} u_{ij}(h) \overline{u_{sl}(h)} d\mu(h) \\ &= (n+k) \sum_{l=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{sl}(u_{ij}, u_{sl}). \end{aligned}$$

Nhờ Bổ đề 2.5 ta có

$$\begin{aligned} (u_{ij} * p)(g) &= (n+k) \sum_{l=1}^k \sum_{s=1}^{n+k} g_{sl} \delta_{is} \delta_{jl} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{nếu } j = k+1, \dots, n+k \\ (n+k)u_{ij}(g) & \text{nếu } j = 1, 2, \dots, k. \end{cases} \end{aligned}$$

Mặt khác với $g \in SU(n+k)$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n+k\}$ ta có

$$(p * u_{ij})(g) = \int_{SU(n+k)} p(h) u_{ij}(h^{-1}g) d\mu(h)$$

$$\begin{aligned}
&= (n+k) \int_{SU(n+k)} \sum_{s=1}^k h_{ss} \sum_{t=1}^{n+k} \overline{h_{ti}} g_{tj} d\mu(h) \\
&= (n+k) \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^{n+k} g_{tj} \int_{SU(n+k)} h_{ss} \overline{h_{ti}} d\mu(h) \\
&= (n+k) \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^{n+k} g_{tj}(u_{ss}, u_{ti}) \\
&= (n+k) \sum_{s=1}^k \sum_{t=1}^{n+k} g_{tj} \delta_{st} \delta_{si} \\
&= \begin{cases} (n+k)u_{ij}(g) & \text{nếu } i = 1, 2, \dots, k \\ 0 & \text{nếu } i = k+1, \dots, n+k. \end{cases}
\end{aligned}$$

Từ các tính toán trên ta suy ra

$$p * u_{ij} * p = \begin{cases} (n+k)^2 u_{ij} & \text{nếu } i, j \in \{1, 2, \dots, k\} \\ 0 & \text{nếu } i, j \in \{k+1, k+2, \dots, n+k\}. \end{cases} \quad (2.13)$$

Để dàng kiểm tra $pC^*(SU(n+k))p$ là một C^* -đại số con của $C^*(SU(n+k))$. Mặt khác biểu thức (2.13) chỉ ra rằng C^* -đại số con này được sinh bởi các hàm u_{ij} ($i, j = 1, 2, \dots, k$). Vì vậy nó chính là C^* -đại số $C_{n,k}^*$. \blacksquare

Định lý 2.17. $C_{n,k}^*$ là một C^* -đại số con di truyền của C^* -đại số $C^*(SU(n+k))$.

Chứng minh. Để chứng minh $C_{n,k}^*$ là một C^* -đại số con di truyền của C^* -đại số $C^*(SU(n+k))$ ta cần chứng minh rằng với mọi $x \in C^*(SU(n+k))$ và $y \in C_{n,k}^*$ thỏa mãn $0 \leq x \leq y$ thì $x \in C_{n,k}^*$.

Thật vậy, theo Bổ đề 2.8 tồn tại $y' \in C^*(SU(n+k))$ sao cho $y = py'p$. Khi đó $0 \leq x \leq py'p$. Áp dụng Mệnh đề 1.6 của Phụ lục A.2 ta có

$$0 \leq (1-p)x(1-p) \leq (1-p)py'p(1-p) = 0.$$

Do đó

$$\begin{aligned}
&(1-p)x(1-p) = 0 \\
&\implies (1-p)\sqrt{x}\sqrt{x}(1-p) = 0 \\
&\implies \begin{cases} (\sqrt{x}(1-p))^*(\sqrt{x}(1-p)) = 0 \\ ((1-p)\sqrt{x})((1-p)\sqrt{x})^* = 0 \end{cases} \\
&\implies \begin{cases} \|\sqrt{x}(1-p)\|^2 = 0 \\ \|(1-p)\sqrt{x}\|^2 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\implies \begin{cases} \sqrt{x} = \sqrt{x}p \\ \sqrt{x} = p\sqrt{x} \end{cases} \\ &\implies x = \sqrt{x}\sqrt{x} = (p\sqrt{x})(\sqrt{x}p) = pxp. \end{aligned}$$

Do đó $x \in pC^*(SU(n+k))p = C_{n,k}^*$. Vậy $C_{n,k}^*$ là một C^* -đại số con di truyền của $C^*(SU(n+k))$. ■

Bổ đề 2.9. [21, Elliot, Định lý 3.1] Một C^* -đại số con di truyền của một AF -đại số là một AF -đại số

Cuối cùng ta thu được định lý sau đây về cấu trúc của không gian thuần nhất không giao hoán $C_{n,k}^*$.

Định lý 2.18. (i) C^* -đại số $C_{n,k}^*$ là một AF -đại số.

(ii) $K_{2*+1}(C_{n,k}^*) = 0$.

Chứng minh. Từ Định lý 2.17 và Bổ đề 2.9 ta suy ra kết luận (i). Ta sẽ chứng minh (ii). Do $C_{n,k}^*$ là một AF -đại số nên nó là giới hạn quy nạp của một dãy các C^* -đại số hữu hạn chiều, tức là tồn tại một hệ quy nạp² $\{(A_\alpha, \phi_{\alpha\beta}) : \alpha < \beta, \alpha, \beta \in I\}$ trong đó A_α ($\alpha \in I$) là các C^* -đại số hữu hạn chiều, sao cho

$$C_{n,k}^* = \varinjlim A_\alpha. \quad (2.14)$$

Do tính liên tục của hàm tử K_{2*+1} (chẳng hạn xem [63, Mệnh đề 7.1.7]) từ công thức trên ta có

$$K_{2*+1}(C_{n,k}^*) = \varinjlim K_{2*+1}(A_\alpha). \quad (2.15)$$

Áp dụng Định lý 6.3.8[41], với mỗi $\alpha \in I$ thì C^* -đại số hữu hạn chiều A_α nếu khác không đều có dạng

$$A_\alpha \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} Mat_{n_i}(\mathbb{C}).$$

Do $K_{2*+1}(Mat_{n_i}(\mathbb{C})) = 0$ (chẳng hạn xem [63, Mục 6.2.3]) từ đẳng thức trên ta có

$$K_{2*+1}(A_\alpha) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n_\alpha} K_{2*+1}(Mat_{n_i}(\mathbb{C})) = 0 \quad (N = 1, 2, \dots). \quad (2.16)$$

Từ (2.15) và (2.16) ta có

$$K_{2*+1}(A_\alpha) \simeq 0. \quad \blacksquare$$

² Xem Phụ lục A.7

A

Sơ lược về C^* -đại số

A.1 Unita hóa một C^* -đại số

Bổ đề 1.10 ([44], **Mệnh đề 1.1.3**). Với mỗi C^* -đại số A , đều tồn tại một C^* -đại số có đơn vị A^+ chứa A như một ideal đóng. Hơn nữa nếu A không có đơn vị thì $A^+/A \simeq \mathbb{C}$.

Định nghĩa 1.23. C^* -đại số A^+ xây dựng ở trên được gọi là một unita hóa của C^* -đại số A .

Gọi $\pi : A^+ \rightarrow \mathbb{C}$ là ánh xạ thương và $\lambda : \mathbb{C} \rightarrow A^+$ là ánh xạ sao cho $\lambda(\varphi(x) + \alpha 1) = \alpha$. Khi đó ta dễ dàng suy ra dãy khớp chẻ sau:

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow A^+ \begin{array}{c} \xrightarrow{\pi} \\ \xleftarrow{\lambda} \end{array} \mathbb{C} \longrightarrow 0. \quad (\text{A.1})$$

Định nghĩa 1.24. Cho A là một C^* -đại số và A^+ là một unita hóa của A . Khi đó

(i) Phần tử $a \in A$ được gọi là một đẳng cự trong A nếu $a^*a = 1$.

(ii) Phần tử $u \in A$ được gọi là một unita trong A nếu $a^*a = aa^* = 1$.

A.2 Phần tử dương và thứ tự trong một C^* -đại số

Định nghĩa 1.25. Giả sử A là một C^* -đại số. Khi đó

- Một phần tử $a \in A$ được gọi là một phần tử dương và ký hiệu $0 \leq a$ nếu a là phần tử tự liên hợp của A và có phổ nằm trong $[0, +\infty)$.
- Với hai phần tử $a, b \in A$, ta viết $a \leq b$ nếu $0 \leq b - a$.

Ta có các tính chất quan trọng sau đây đối với quan hệ \leq trên C^* -đại số A

Mệnh đề 1.6. Giả sử A là một C^* -đại số với quan hệ \leq được định nghĩa ở trên. Khi đó

- (i) \leq là một quan hệ thứ tự (bộ phận) trên C^* -đại số A .
- (ii) Nếu $a \leq b$ thì $x^*ax \leq x^*bx$ với mọi $x \in A$.
- (iii) Giả sử a là một phần tử của A thỏa mãn $0 \leq a$. Khi đó tồn tại duy nhất một phần tử dương \sqrt{a} sao cho $a = (\sqrt{a})^2$.

Chứng minh của mệnh đề trên có thể tìm thấy trong [44, Mục 1.3].

A.3 Ánh xạ hoàn toàn dương

Định nghĩa 1.26. Một ánh xạ tuyến tính bị chặn $\pi : A \rightarrow B$ giữa hai C^* -đại số được gọi là hoàn toàn dương nếu

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n b_i^* \pi(a_i^* a_j) b_j \geq 0$$

với mọi số nguyên dương n , với mọi $a_1, a_2, \dots, a_n \in A$ và mọi $b_1, b_2, \dots, b_n \in B$.

Nhận xét. Một $*$ -đồng cấu luôn là một ánh xạ hoàn toàn dương. Tuy nhiên điều ngược lại nói chung không đúng.

Định nghĩa 1.27. Một ánh xạ tuyến tính $\pi : A \rightarrow B$ giữa hai C^* -đại số được gọi là một phép co nếu thỏa mãn

$$\|\pi(a - b)\| \leq \|a - b\| \quad (a, b \in A).$$

A.4 σ -đại số

Trước hết ta nhắc lại khái niệm về một đơn vị xấp xỉ của một C^* -đại số.

Định nghĩa 1.28. Cho A là một C^* -đại số. Một mạng $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ trong A_+ , nón các phần tử dương¹ của A , được gọi là một đơn vị xấp xỉ của A nếu $\lambda < \mu$ thì $u_\lambda < u_\mu$ và $\lim \|x(1 - u_\lambda)\| = 0$ với mọi $x \in A$.

Định lý sau đây khẳng định rằng một đơn vị xấp xỉ như vậy luôn tồn tại trong một C^* -đại số bất kỳ.

Định lý 1.19. Mỗi C^* -đại số đều chứa một đơn vị xấp xỉ.

¹ Xem Phụ lục A.2

Có thể xem chứng minh của định lý trên trong [44, Định lý 1.4.2]. Chú ý rằng tập chỉ số Λ ứng với mỗi đơn vị xấp xỉ không phải bao giờ cũng là tập đếm được. Điều đó dẫn đến khái niệm sau đây

Định nghĩa 1.29. Một C^* -đại số A được gọi là một σ -đại số nếu nó chứa một đơn vị xấp xỉ $\{u_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ với tập chỉ số Λ là một tập đếm được.

Nhận xét. Có một cách định nghĩa khác (chẳng hạn xem [29, Định nghĩa 1.1.20]) về σ -đại số (đó là: một C^* -đại số được gọi là σ -đại số nếu nó chứa một phần tử dương chặt). Tuy nhiên cách định nghĩa này phức tạp hơn vì ta phải xây dựng khái niệm các trạng thái trên một C^* -đại số.

A.5 Đại số nhân tử

Định nghĩa 1.30. Giả sử A là một C^* -đại số bất kỳ. Nhờ định lý của Gelfand-Naïmark² (chẳng hạn xem [23, Định lý 1.17]) ta có thể xem A là một C^* -đại số con của C^* -đại số $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ các toán tử tuyến tính liên tục trên một không gian Hilbert \mathcal{H} vô hạn chiều với tác động không suy biến của A trên không gian Hilbert đó. Một phần tử $x \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ được gọi là một nhân tử³ (hai phía) cho A nếu $xA \subset A$ và $Ax \subset A$. Khi đó tập tất cả các nhân tử cho A :

$$M(A) := \{x \in \mathbb{B}(\mathcal{H}) : xA \subset A \text{ và } Ax \subset A\}$$

tạo thành một C^* -đại số con của $\mathbb{B}(\mathcal{H})$ và được gọi là đại số nhân tử của A .

Khi làm việc với lý thuyết của các C^* -module Hilbert, đôi khi người ta sử dụng định lý sau đây (xem [37, Chương 2]) để có một cái nhìn khác về bản chất của đại số nhân tử.

Định lý 1.20 ([37]). Giả sử A là một C^* -đại số tùy ý. Xem A là một C^* -module Hilbert trên chính nó, khi đó ta có các đẳng cấu giữa các C^* -đại số như sau

$$(i) A \simeq \mathbb{K}_A(A),$$

$$(ii) M(A) \simeq \mathbb{L}_A(A).$$

Bây giờ ta sẽ định nghĩa tôpô chặt trên đại số nhân tử.

Định nghĩa 1.31. Giả sử $M(A)$ là đại số nhân tử của C^* -đại số A . Tôpô chặt trên $M(A)$ là tôpô sinh bởi các nửa chuẩn

$$|||x|||_a = \|xa\| + \|ax\| \quad (a \in A).$$

² Chú ý rằng định lý này là một hệ quả của cấu trúc GNS chứ không phải định lý nói rằng mỗi C^* -đại số giao hoán đều đẳng cấu với không gian các hàm liên tục triệt tiêu tại vô hạn trên phổ của nó

³ Tiếng Anh là: multiplier

Ta có mệnh đề quan trọng sau đây (xem [29, Mệnh đề 1.1.13]) về sự hội tụ trong đại số nhân tử theo tôpô chặt

Mệnh đề 1.7. *Giả sử $\{u_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$ là một đơn vị xấp xỉ của C^* -đại số A . Khi đó với mọi $m \in M(A)$ thì $\{mu_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ và $\{u_\lambda m\}_{\lambda \in \Lambda}$ đều hội tụ đến m theo tôpô chặt của $M(A)$.*

Mệnh đề 1.8 ([29], Bổ đề 1.1.14). *Cho A là một C^* -đại số, E là một G -module Hilbert và $\phi : A \rightarrow \mathbb{K}_B(E)$ là một $*$ -đẳng cấu. Khi đó $\overline{\phi(A)E} = E$ và mở rộng liên tục theo tôpô chặt $\overline{\phi} : M(A) \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ của ϕ cũng là một $*$ -đẳng cấu.*

A.6 Tích tensor của các C^* đại số, C^* -đại số hạt nhân

Nếu như tích tensor của hai không gian Hilbert được xác định một cách duy nhất do trên tích tensor đại số của hai không gian đó chỉ tồn tại duy nhất một tích trong (xem [41, Định lý 6.3.1]) thì vấn đề xây dựng tích tensor của hai C^* -đại số lại khá phức tạp. Các tài liệu tham khảo tốt cho phần này là [37], [41, Mục 6.3] và [30, Mục 11.3].

Tích tensor của các C^* -đại số

Cho A và B là hai C^* -đại số. Gọi $A \odot B$ là tích tensor đại số của A và B , tức là tích tensor của hai không gian vectơ phức cùng với phép nhân $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (a_1 \cdot a_2) \otimes (b_1 \cdot b_2)$ và phép đối hợp $(a \otimes b)^* = a^* \otimes b^*$ với mọi $a_1, a_2, a \in A$ và $b_1, b_2, b \in B$. Ta sẽ xem xét các chuẩn p vừa là chuẩn chéo, tức thỏa mãn $p(a \otimes b) = \|a\| \cdot \|b\|$, vừa là một C^* -chuẩn, tức thỏa mãn $p(a^* \cdot a) = p(a)^2$, trên $A \odot B$. Trong những chuẩn thỏa mãn điều kiện trên, luôn tồn tại một chuẩn lớn nhất μ và một chuẩn bé nhất σ theo nghĩa $\sigma(x) \leq p(x) \leq \mu(x)$ với mọi $x \in A \odot B$. Bây giờ ta sẽ đi xây dựng chuẩn bé nhất ở trên.

Định nghĩa 1.32 (Tích tensor không gian). *Cho A và B các C^* -đại số với các biểu diễn phổ dụng tương ứng (H, φ) và (K, ψ) , tức biểu diễn là tổng trực tiếp các biểu diễn GNS cảm sinh từ các trạng thái trên C^* -đại số tương ứng (xem thêm [41, Mục 3.4]). Theo [41, Định lý 6.3.3] tồn tại duy nhất một $*$ -đơn cấu $\pi : A \odot B \rightarrow B(H \widehat{\otimes} K)$ sao cho $\pi(a \otimes b) = \varphi(a) \widehat{\otimes} \psi(b)$ với mọi $a \in A$ và $b \in B$, trong đó $H \widehat{\otimes} K$ là tích tensor của hai không gian Hilbert H và K . Khi đó dễ dàng kiểm tra rằng hàm*

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_* : A \odot B &\rightarrow R^+ \\ x &\mapsto \|\pi(x)\| \end{aligned}$$

là một C^* -chuẩn và được gọi là một C^* -chuẩn không gian⁴. Bao đầy đủ của $A \odot B$ theo chuẩn $\|\cdot\|_*$ được gọi là tích tensor không gian⁵ của A và B và được ký hiệu là $A \otimes_* B$.

⁴ Tên tiếng Anh: Spatial C^* -norm

⁵ Tên tiếng Anh: Spatial tensor product

Định lý sau đây sẽ khẳng định chuẩn C^* không gian định nghĩa ở trên là chuẩn nhỏ nhất trong các chuẩn trên $A \odot B$. Chính bởi lý do này nên đôi khi người ta gọi chuẩn C^* không gian là chuẩn cực tiểu và tích tensor tương ứng là tích tensor cực tiểu.

Định lý 1.21. [41, Định lý 6.4.18] *Giả sử A và B là hai C^* -đại số tùy ý. Khi đó chuẩn C^* không gian là một C^* -chuẩn nhỏ nhất trên $A \odot B$.*

C^* -đại số hạt nhân

Định nghĩa 1.33. *Một C^* -đại số A được gọi là hạt nhân nếu với mọi C^* -đại số B đều tồn tại duy nhất một C^* -chuẩn trên tích tensor đại số $A \odot B$.*

Định lý sau đây sẽ liệt kê một số lớp C^* -đại số là C^* -đại số hạt nhân.

Định lý 1.22 ([4], Định lý 15.8.2). *Mọi C^* -đại số giao hoán, C^* -đại số hữu hạn chiều, AF -đại số, C^* -đại số nhóm của một nhóm compact đều là các C^* -đại số hạt nhân.*

A.7 Giới hạn quy nạp trong phạm trù các C^* đại số, AF -đại số

Giới hạn quy nạp của các C^* -đại số

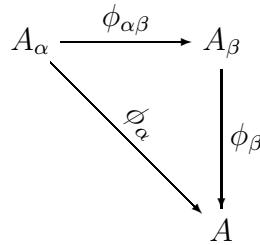
Định nghĩa 1.34 (Hệ quy nạp). *Giả sử I là một tập có thứ tự và $\{A_\alpha : \alpha \in I\}$ là một họ các C^* -đại số. Một hệ quy nạp là một họ $\{(A_\alpha, \phi_{\alpha\beta}) : \alpha < \beta, \alpha, \beta \in I\}$, trong đó $\phi_{\alpha\beta}$ là các $*$ -đồng cấu từ C^* -đại số A_α vào C^* -đại số A_β và thỏa mãn $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\gamma\beta} \phi_{\alpha\gamma}$ với mọi $\alpha < \beta < \gamma$ trong I , tức là làm cho sơ đồ sau giao hoán*

$$\begin{array}{ccc} A_\alpha & \xrightarrow{\phi_{\alpha\beta}} & A_\beta \\ & \searrow \phi_{\alpha\gamma} & \downarrow \phi_{\beta\gamma} \\ & & A_\gamma \end{array}$$

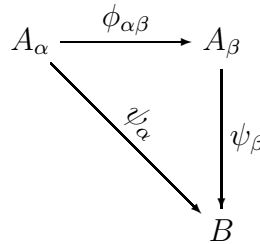
Một khái niệm tương tự với khái niệm giới hạn trong giải tích cổ điển được xây dựng trong phạm trù các C^* -đại số như sau

Định nghĩa 1.35 (Giới hạn quy nạp). Giả sử $\{(A_\alpha, \phi_{\alpha\beta}) : \alpha < \beta, \alpha, \beta \in I\}$ là một hệ quy nạp của các C^* -đại số. Khi đó $\{(A, \phi_\alpha) : \alpha \in I\}$ bao gồm một C^* -đại số A cùng với họ các $*$ -đồng cấu ϕ_α từ A_α vào A ($\alpha \in I$) được gọi là giới hạn quy nạp⁶, được ký hiệu $A = \varinjlim (A_\alpha, \phi_{\alpha\beta})$ hoặc ký hiệu ngắn gọn $A = \varinjlim A_\alpha$ khi họ các $*$ -đồng cấu trên được xác định, nếu thỏa mãn các điều kiện sau

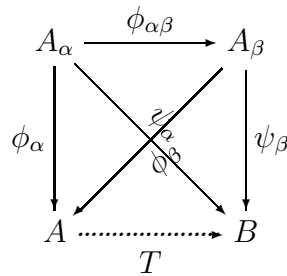
- Với mọi $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in I$), sơ đồ sau là giao hoán



- Nếu có một C^* -đại số B cùng với một họ các $*$ -đồng cấu ψ_α từ A_α vào B ($\alpha \in I$) làm cho sơ đồ sau đây giao hoán với mọi $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in I$)



thì tồn tại duy nhất một $*$ -đồng cấu T từ A vào B làm cho sơ đồ sau đây giao hoán với mọi $\alpha < \beta$ ($\alpha, \beta \in I$)



AF-đại số

Định nghĩa 1.36. Một C^* -đại số được gọi là một AF-đại số nếu nó là giới hạn quy nạp của một họ các C^* -đại số hữu hạn chiều.

⁶ Còn được gọi là giới hạn thuận

B

Sơ lược về C^* -module Hilbert

B.1 C^* -module Hilbert

Cho B là một C^* -đại số với chuẩn $\|\cdot\|$.

Định nghĩa 2.37. Một B -module tiền Hilbert là một không gian vectơ phức E và đồng thời là một B -module phải được trang bị một ánh xạ $\langle \cdot, \cdot \rangle: E \times E \rightarrow B$ tuyến tính theo biến thứ hai và thỏa mãn các điều kiện sau đây với mọi $b \in B, x, y \in E$:

- (i) $\langle x, yb \rangle = \langle x, y \rangle b$,
- (ii) $\langle x, y \rangle^* = \langle y, x \rangle$,
- (iii) $\langle x, x \rangle \geq 0$,
- (iv) $\langle x, x \rangle = 0$ kéo theo $x = 0$.

Từ đó ta đi đến khái niệm một C^* -module Hilbert như sau

Định nghĩa 2.38 (C^* -module Hilbert). Một B -module Hilbert là bổ sung đầy đủ của một B -module tiền Hilbert E theo chuẩn sau đây

$$\|e\| = \|\langle e, e \rangle\|^{\frac{1}{2}} \quad (e \in E).$$

Ví dụ 2.3. Bản thân B là một B -module Hilbert với tích trong xác định bởi công thức: $\langle a, b \rangle = a^*b$.

Định nghĩa 2.39 ($\mathbb{L}_B(E_1, E_2)$). Với mỗi cặp hai B -module Hilbert E_1, E_2 ta ký hiệu $\mathbb{L}_B(E_1, E_2)$ là tập tất cả các hàm $T: E_1 \rightarrow E_2$ sao cho tồn tại một ánh xạ $T^*: E_2 \rightarrow E_1$, gọi là liên hợp của T , sao cho

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle \quad (x \in E_1, y \in E_2).$$

Khi $E_1 = E_2 = E$ ta ký hiệu $\mathbb{L}_B(E) = \mathbb{L}_B(E, E)$.

Mệnh đề 2.9 ([29], **Bổ đề 1.1.7**). *Giả sử E là một B -module Hilbert. Khi đó $\mathbb{L}_B(E)$ là một C^* -đại số.*

Định nghĩa 2.40 ($\mathbb{K}_B(E_1, E_2)$). *Giả sử E_1, E_2 là một cặp hai B -module Hilbert. Với mỗi $x \in E_2$ và $y \in E_1$ ta định nghĩa một ánh xạ $\theta_{x,y} : E_1 \rightarrow E_2$ xác định bởi*

$$\theta_{x,y}(z) = x \langle y, z \rangle \quad (z \in E).$$

Dễ dàng kiểm tra rằng $\theta_{x,y}^ = \theta_{y,x}$ và từ đó $\theta_{x,y} \in \mathbb{L}_B(E_1, E_2)$. Ký hiệu $\mathbb{K}_B(E_1, E_2)$ là bao tuyến tính đóng của tập $\{\theta_{x,y} : x \in E_2, y \in E_1\}$. Khi $E_1 = E_2 = E$ ta ký hiệu $\mathbb{K}_B(E) = \mathbb{K}_B(E, E)$.*

Mệnh đề 2.10 ([29], **Bổ đề 1.1.9**). *Giả sử E là một B -module Hilbert. Khi đó $\mathbb{K}_B(E)$ là một ideal hai phía đóng của $\mathbb{L}_B(E)$.*

B.2 C^* -module Hilbert phân bậc

Trước hết ta sẽ nhắc lại khái niệm một C^* -đại số phân bậc.

Định nghĩa 2.41. *Một C^* -đại số phân bậc là một C^* -đại số B cùng với một ánh xạ $*$ -tuyến tính β_B thỏa mãn $\beta_B^2 = id$. Khi đó β_B được gọi là ánh xạ phân bậc của B và ta nói rằng B được phân bậc bởi ánh xạ β_B .*

Sau đây sẽ là khái niệm một C^* -module Hilbert phân bậc trên một C^* -đại số phân bậc.

Định nghĩa 2.42. *Một B -module Hilbert phân bậc trên một C^* -đại số phân bậc với ánh xạ phân bậc β_B là một B -module Hilbert cùng với một song ánh tuyến tính $S_E : E \rightarrow E$, được gọi là toán tử phân bậc, sao cho các điều kiện sau đây được thỏa mãn:*

- (i) $S_E(eb) = S_E(e)\beta_B(b) \quad (e \in E, b \in B)$,
- (ii) $\langle S_E(e), S_E(f) \rangle = \beta_B(\langle e, f \rangle) \quad (e, f \in E)$,
- (iii) $S_E^2 = id$.

Từ đó ta có $E = E_0 \oplus E_1$ với $E_0 = \{e \in E : S_E(e) = e\}$ và $E_1 = \{e \in E : S_E(e) = -e\}$.

B.3 Tích tensor trong

Giả sử A là một C^* -đại số, E là một B -module phân bậc, $\varphi : A \rightarrow \mathbb{L}_B(E)$ là một $*$ -đồng cấu. Chú ý rằng A là một C^* -đại số thì nó cũng là một vành với các phép toán cộng và

nhân hai phần tử trùng với các phép toán tương ứng của cấu trúc C^* -đại số của nó. Để dàng kiểm tra rằng E có cấu trúc một module trái trên vành A với tác động trái của A trên E được xác định bởi: $a.e = (\varphi(a))(e)$, với mọi $a \in A$ và $e \in E$. Bản thân A là một module phải trên vành A . Gọi $A \otimes_A E$ là tích tensor của hai module A và E trên vành A .

Định nghĩa 2.43. *Trang bị cho $A \otimes_A E$ cấu trúc của một B -module tiền Hilbert với tác động phải của B trên $A \otimes_A E$ xác định bởi*

$$(a \otimes e).b = a \otimes (e.b) \quad (a \in A, e \in E, b \in B)$$

và tích trong xác định bởi

$$\langle a_1 \otimes e_1, a_2 \otimes e_2 \rangle = \langle e_1, \varphi(a_1^* a_2) e_2 \rangle \quad (a_1, a_2 \in A, e_1, e_2 \in E).$$

Khi đó bao đóng của $A \otimes_A E$ ứng với chuẩn cảm sinh bởi tích trong ở trên là một B -module Hilbert và được gọi là tích tensor trong của A và E , được ký hiệu là $A \otimes_{\varphi} E$, các phần tử $a \otimes e$ của $A \otimes_A E$, với mọi $a \in A, e \in E$, trong $A \otimes_{\varphi} E$ được ký hiệu là $a \otimes_{\varphi} e$.

Trong trường hợp A là một C^* -đại số phân bậc tầm thường và E phân bậc bởi toán tử phân bậc S_E ta định nghĩa một toán tử phân bậc trên $A \otimes_{\varphi} E$ là $S_{A \otimes_{\varphi} E} = id \otimes S_E$ xác định bởi

$$S_{A \otimes_{\varphi} E}(a \otimes_{\varphi} e) = a \otimes_{\varphi} S_E(e) \quad (a \in A, e \in E).$$

Khi đó $A \otimes_{\varphi} E$ cùng với toán tử phân bậc $S_{A \otimes_{\varphi} E}$ được gọi là một tích tensor trong phân bậc.

Kết luận

Mục đích của luận văn là nghiên cứu các kết quả mô tả gần đây của Mayer-Thomsen về đặc trưng của các phần tử trong các nhóm KK -lý thuyết đẳng biến, ứng dụng của đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến và nghiên cứu cấu trúc của các C^* -đại số của không gian thuần nhất. Kết quả của luận văn là đã hoàn thành các công việc nghiên cứu sau:

- Nghiên cứu tổng quan lịch sử ra đời của KK -lý thuyết nói chung và KK -lý thuyết đẳng biến nói riêng.
- Nghiên cứu các kết quả nghiên cứu mới nhất của Mayer-Thomsen về sự ổn định hóa trong KK -lý thuyết đẳng biến.
- Trình bày tổng quan và sử dụng đối ngẫu Thomsen trong KK -lý thuyết đẳng biến để đưa ra một chứng minh khác cho một kết quả đã có.
- Trình bày tổng quan về chương trình hình học không giao hoán, từ đó giải thích xuất xứ của việc nghiên cứu cấu trúc của các C^* -đại số của không gian thuần nhất và đã thu được các kết quả nghiên cứu cấu trúc của C^* -đại số $C_{n,k}^*$.

Tài liệu tham khảo

1. M. F. Atiyah, *Bott periodicity and the index of elliptic operators*, Quart. J. Math. Oxford Ser. (2), **19**(1968), 13--140.
2. M. F. Atiyah, F. Hirzebruch, *Riemann-Roch theorems for differentiable manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **65**(1959), 276--281.
3. M. F. Atiyah, I. M. Singer, *The index of elliptic operators on compact manifolds*, Bull. Amer. Math. Soc., **69**(1963), 422--433.
4. B. Blackadar, *K-theory for Operator Algebras*, Cambridge University Press, 1998.
5. J. Brodzki, V. Mathai, J. Rosenberg, R. J. Szabo, *D-branes, KK-theory and duality on noncommutative spaces*, Comm. Math. Phys., **277**(2008), no.3, 643--706.
6. L. G. Brown, R. G. Douglas, P. A. Fillmore, *Extension of C^* -algebras and K-homology*, Annals of Mathematics, **105**(1977), 265-324.
7. V. Chari, A. Pressley, *A Guide to Quantum Groups*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
8. A. Connes, G. Skandalis, *The longitudinal index theorem for foliations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci., **20** (1984), no. 6, 1139--1183.
9. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, Inc., San Diego - New York - Boston - London - Sydney - Tokyo - Toronto, 1994.
10. J. Cunz, *A new look at KK-theory*, K-Theory, **1**(1987), no.1, 31-51.
11. D. N. Diep, *The structure of the group C^* -algebra of the group of affine transformations of the straight line*, Funkt. Anal. i Priloz., **9**(1975), no.1, 63-64.
12. D. N. Diep, *A survey of noncommutative geometry methods for group algebras*, J. of Lie Theory, **7**(1993), 149-176.
13. D. N. Diep, *Methods of Noncommutative Geometry for Group C^* -algebras*, Chapman & Hall/CRC Research Notes in Mathematics, **416**, Chapman & Hall/CRC, Boca

- Raton, FL, 2000.
14. D. N. Diep, A. O. Kuku, N. Q. Tho, *Noncommutative Chern characters of compact Lie group C^* -algebras*, *K-Theory*, **17**(1999), 195--208.
 15. D. N. Diep, A. O. Kuku, N. Q. Tho, *Noncommutative Chern characters of compact quantum groups*, *J. Algebra*, **226**(2000), 311--331.
 16. D. N. Diep, *The noncommutative Chern-Connes character of the locally compact quantum normalizer of $SU(1, 1)$ in $SL(2, \mathbb{C})$* , *Internat. J. Math*, **15**(2004), 361--367.
 17. D. N. Diep, *Riemann-Roch theorem and index theorem in non-commutative geometry*, *Abstract and applied analysis*, 29--50, World Sci. Publ., River Edge, NJ, 2004.
 18. D. N. Diep, *Graded Čech cohomology in noncommutative geometry*, *Advances in deterministic and stochastic analysis*, 255--268, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2007.
 19. D. N. Diep, *Category of noncommutative CW Complexes*, Preprint, arXiv:0707.0191, 2008.
 20. D. N. Diep, *Noncommutative spherical tight frames in finitely generated Hilbert C^* -modules*, Preprint, arXiv:math/0409541, 2008.
 21. G. A. Elliott, *Automorphisms determined by multipliers on ideals of a C^* -algebra*, *J. Functional Analysis* **23** (1976), no. 1, 1--10.
 22. I. Gelfand, M. Naïmark, *On the imbedding of normed rings into the ring of operators in Hilbert space*, *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S.* **12(54)**, (1943). 197--213.
 23. J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly, H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkhäuser Advanced Texts: Basler Lehrbücher, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2001.
 24. N. Higson, *A primer on KK -theory*, *Proc. Sympos. Pure Math.*, **51**(1990), 239--283.
 25. N. Higson, *C^* -algebra extension theory and duality*, *J. Funct. Anal.* **129** (1995), no. 2, 349--363.
 26. N. Higson, *Bivariant K -theory and the Novikov conjecture*, *Geom. Funct. Anal.*, **10**(2000), no. 3, 563--581.
 27. N. Higson, *The local index formula in noncommutative geometry*, *CTP Lecture Notes*, **15**(2004), 443-536.
 28. D. Husemöller, M. Joachim, B. Jurčo, M. Schottenloher, *Basic Bundle Theory and K -Cohomology Invariants*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 2008.
 29. K. K. Jensen, K. Thomsen, *Elements of KK -theory*, Birkhäuser, Boston - Basel - Berlin, 1991.

30. R. V. Kadison, J. R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras. Vol. II. Advanced theory*, Graduate Studies in Mathematics, 16. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.
31. G. G. Kasparov, *Hilbert C^* -modules: Theorems of Stinespring and Voiculescu*, J. Operator Theory, English transl., **4**(1980), 133-150.
32. G. G. Kasparov, *The operator K -functor and extensions of C^* -algebras*, Math.. USSR Izvestija, English transl., **44**(1980), No. 3, 513-572.
33. G. G. Kasparov, *Operator K -theory and its applications*, Current problems in mathematics. Newest results, English transl., **27**(1985), 3-31.
34. G. G. Kasparov, *Equivariant KK -theory and the Novikov conjecture*, Inventiones mathematicae, English transl., **91**(1988), 147-201.
35. A. A. Kirillov, *Elements of the Theory of Representations*, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg - New York, 1976.
36. M. Khalkhali, *Lectures on Noncommutative Geometry. An Invitation to Noncommutative Geometry*, 169--273, World Sci. Publ., Hackensack, NJ, 2008.
37. E. C. Lance, *Tensor products and nuclear C^* -algebras*, Operator algebras and applications, Part I (Kingston, Ont., 1980), 379--399, Proc. Sympos. Pure Math., **38**, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1982.
38. E. C. Lance, *Hilbert C^* -modules. A Toolkit for Operator Algebraists*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **210**, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
39. R. Meyer, *Equivariant Kasparov theory and generalized homomorphisms*, K-theory, **21**(2000), 201-228.
40. R. Meyer, *Universal coefficient theorems for Kirchbergs bivariant K -theory I*, Sixth Annual Spring Institute on Noncommutative Geometry and Operator Algebras, Vanderbilt University, 2008.
41. G. J. Murphy, *C^* -algebras and Operator Theory*, Academic Press, Inc., Boston, MA, 1990.
42. J. Packer, *Transformation group C^* -algebras: a selective survey. C^* -algebras: 1943-1993 (San Antonio, TX, 1993)*, 182--217, Contemp. Math., **167**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994.
43. W. L. Paschke, *K -theory for commutants in the Calkin algebra*, Pacific J. Math., **95** (1981), No. 2, 427--434.

44. G. K. Pedersen, *C*-algebras and their Automorphism Groups*, Academic press, London - New York - San Francisco, 1979.
45. N. C. Phillips, *Equivariant K-theory and Freeness of Group Actions on C*-algebras*, Lecture Notes in Mathematics, 1274, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
46. P. Podleś, E. Müller, *Introduction to quantum groups*, Rev. Math. Phys. **0**(1998), no. 4, 511--551.
47. M. Rørdam, F. Larsen, N. Laustsen, *An Introduction to K-theory for C*-algebras*, Cambridge University Press, 2000.
48. J. Rosenberg, *The C*-algebras of some real and p-adic solvable groups*, Pacific J. Math., **65**(1976), 175-192.
49. J. Rosenberg, J. Brodzki, V. Mathai, R. J. Szabo, *Noncommutative correspondences, duality and D-branes in bivariant K-theory*, Adv. in Theoretical and Math. Phys., **13**(2009), to appear.
50. B. E. Sagan, *The Symmetric Group. Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*, Second edition, Graduate Texts in Mathematics, **203**, Springer-Verlag, New York, 2001.
51. G. Skandalis, *Kasparov's Operator K-theory and applications*, Sixth Annual Spring Institute on Noncommutative Geometry and Operator Algebras, Vanderbilt University, 2008.
52. E. H. Spanier, J. H. C. Whitehead, *Duality in homotopy theory*, Mathematika **2** (1955), 56--80.
53. R. Szabo, *D-branes and bivariant K-theory*, Noncommutative Geometry and Physics 2008: K-theory and D-branes, Yokohama, 2008.
54. R. G. Swan, *Vector bundles and projective modules*, Trans. Amer. Math. Soc., **105**(1962), 264--277.
55. M. Sugiura, *Unitary Representations and Harmonic Analysis. An Introduction*, North-Holland, 1990.
56. H. Takai, T. Natsume, *A. Connes' noncommutative differential geometry*, Sugaku **35**(1983), no. 2, 97--112.
57. N. Q. Tho, *Non-commutative Chern Characters of the C*-algebras of spheres and quantum spheres*, Preprint, ArXiv:math/9908048, 1999.
58. K. Thomsen, *The universal property of equivariant KK-theory*, J. Reine Angew. Math., **504**(1998), 55--71.
59. K. Thomsen, *Equivariant KK-theory and C*-extensions*, K-Theory, **19**(2000), 219-249.

-
60. K. Thomsen, *On absorbing extensions*, Proc. Amer. Math. Soc., **109**(2001), no.5, 1409-1417.
 61. K. Thomsen, *Duality in equivariant KK-theory*, Pacific Journal of Mathematics, **222**(2005), no.2, 365-397.
 62. A. Valette, *A remark on the Kasparov groups $\text{Ext}(A, B)$* , Pacific J. Math. **109** (1983), no. 1, 247--255.
 63. N. E. Wegge-Olsen, *K-theory and C^* -algebras. A Friendly Approach*, Oxford Science Publications, The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1993.
 64. S. L. Woronowicz, *Compact matrix pseudogroups*, Comm. Math. Phys. **111** (1987), no. 4, 613--665.