Differentiable Mangfoldigheder

Specialkursus på Institut for Matematik - Sommeren 2005

Skrevet af:
Ask H. Larsen, **s021864**
Mads Søndergård, **s001418**
Laust E.H. Tophøj, **s021645**

Vejleder: Vagn Lundsgaard Hansen

16. oktober 2006

Danmarks Tekniske Universitet
Lyngby

Indholdsfortegnelse

Kapitel 1

Implicit og invers funktions sætningerne

I dette kapitel vil vi vise, at invers funktions sætningen og sætningen om implicit givne funktioner er ækvivalente.

Diffeomorfi

Givet $U \subseteq E, V \subseteq F$ er åbne mængder i Banach rum E og F, og $f : U \mapsto V$ er en C^r differentiabel afbildning, $r \geqslant 1$.

Lemma 1. *Hvis og kun hvis (i) $f : U \mapsto V$ er bijektiv, og (ii) differentialet $Df(x) : E \mapsto F$ er en toplineær isomofi for alle $x \in U$, er $f : U \mapsto V$ en C^r diffeomorfi.*

Den inverse funktion f^{-1} har differentialet $(Df(x))^{-1}$ i $f(x) \in V$.

Bevis: Af (i) har f en invers afbildning, lad mig kalde den $f^{-1} : V \mapsto U$. For ethvert punkt $y \in V$ findes desuden et $x \in U$, så $f(x) = y$. Af invers funktions sætningen findes nu af (ii) en åben omegn $P \subseteq U$ af $x \in U$ og en åben omegn $Q \subseteq V$ af $y \in V$, så f afbilder P C^r diffeomorft på Q. Den lokale inverse funktion $f^{-1}|Q$ er altså C^r på Q, så alle op til r'te ordens partielle afledede eksisterer og er kontinuerte i punktet $y \in V$. Dette gælder jo i ethvert punkt på V, og dermed er f^{-1} C^r på V, og $f : U \mapsto V$ er en diffeomorfi af klasse C^r.

Det omvendte resultat følger direkte af definitionen på differentiabilitet.

Fordi f er en diffeomorfi, er $f^{-1} \circ f = 1_U$ og $f \circ f^{-1} = 1_V$ differentiable afbildninger med differentialerne i $x \in U$ hhv. $f(x) \in V$, er

$$Df^{-1}(f(x)) \circ Df(x) = 1_E, \qquad Df(x) \circ Df^{-1}(f(x)) = 1_F. \tag{1.1}$$

Således er $Df^{-1}(f(x)) = (Df(x))^{-1}$.

Partielle differentialer

Vi ser på afbildninger i normerede vektorrum E_1, E_2 og F. Heri betragtes produktrummet $E_1 \times E_2$ udstyret med maksimumsnormen.

En åben mængde $U \subseteq E_1 \times E_2$ indeholdende $x = (x_1, x_2) \in U$ betragtes. Vi undersøger en afbildning $f : U \mapsto F$, der er C^r differentiabel, $r \geqslant 1$.

Indskrænkningen af f til underrummet $(E_1 \times \{x_2\} \cap U) \subseteq U$ kaldes f_1; det partielle differential langs E_1, $D_{E_1}f(x) : E_1 \mapsto F$ defineres ved $D_{E_1}f(x) = Df_1(x_1)$.

Tilsvarende defineres indskrænkningen f_2 og det partielle differential langs E_2, $D_{E_2}f(x)$ ved $Df_2(x_2)$.

Lemma 2. *Differentialet $Df(x)$ kan konstrueres ved de partielle differentialer $D_{E_1}f(x)$, $D_{E_2}f(x)$, således at der for $h \in E_1$ og $k \in E_2$ gælder*

$$Df(x)(h,k) = D_{E_1}f(x)h + D_{E_2}f(x)k = \begin{bmatrix} D_{E_1}f(x) & D_{E_2}f(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

Bevis:

Betragt en vektor $(h,k) \in E_1 \times E_2$, hvor h hhv. k er projektionerne af (h,k) på E_1 hhv. E_2. Idet differentialet $Df(x)$ er en lineær afbildning, er nu

$$Df(x)(h,k) = Df(x)(h,0) + Df(x)(0,k). \tag{1.3}$$

Vi skal udtrykke disse indskrænkede differentialer ved de partielle differentialer. Se nu på definitionen af differentialet af f for en tilvækst $(h,0) \in E_1 \times \{0\} \in E_2$. Så har vi

$$f(x + (h,0)) - f(x) = (Df(x)|E_1)h + \|h\|\varepsilon(h,0). \tag{1.4}$$

Det er klart, at $f(x + (h,0)) - f(x) = f_1(x_1 + h) - f_1(x_1)$.

Således er restriktionen af differentialet det samme som differentialet af restriktionen. Argumentet er lige godt for en tilvækst indskrænket til E_2. Derfor gælder for $i = 1, 2$, at

$$Df(x)|E_i = D_{E_i}f(x). \tag{1.5}$$

Dette beviser med ligning (1.3) lemmaet.

1.1 Implicit funktions sætningen

Vi befinder os i Banach rummene X, Y og Z. Vi betragter en åben mængde $U \subseteq X \times Y$ og en C^r differentiabel afbildning $f : U \mapsto Z$, $r \geqslant 1$. I det følgende vil vi betegne punkter i U ved $w = (x,y)$, hvor $x \in X$ og $y \in Y$.

Vi ser nu på et givet punkt $w_0 = (x_0, y_0) \in U$, hvor $f(w_0) = 0$ og det partielle differential $D_Y f(w_0) : Y \mapsto Z$ er en toplineær isomorfi.

Sætning 1 (Implicit funktions sætningen). *Der findes åbne omegne $W \subseteq X$ af x_0 og $V \subseteq U$ af (x_0, y_0), og en C^r differentiabel afbildning $g : X \mapsto Y$, så*

$$[(x,y) \in V \text{ og } f(x,y) = 0] \qquad \Leftrightarrow \qquad [x \in W \text{ og } y = g(x)]. \tag{1.6}$$

Bevis:

Vi indfører en hjælpeafbildning Φ i *1)*, viser at den er en toplineær isomorfi i *2)* og viser til sidst sætningen i *3)*.

1) Hjælpeafbildningen Φ
Vi indfører en afbildning

$$\Phi : U \mapsto X \times Z, \quad \Phi(x,y) = (x, f(x,y)). \tag{1.7}$$

Komponentfunktionerne (vi kalder dem Φ_1 og Φ_2) er C^r differentiable, så det er Φ også.

Differentialet $D\Phi(w_0) : X \times Y \mapsto X \times Z$ er altså en kontinuert lineær afbildning. Det er klart, at $D\Phi(w_0) = (D\Phi_1(w_0), D\Phi_2(w_0))$. Heraf fås for ethvert $h \in X$ og $k \in Y$, idet Φ_1 er lineær og dermed sit eget differential,

$$D\Phi(w_0)(h,k) = (h, Df(w_0)(h,k)). \tag{1.8}$$

Ved lemma 2 deler vi $Df(w_0)(h,k)$ op ved de partielle differentialer langs X hhv. Yog får (med $1_X(h) = h$):

$$D\Phi(w_0)(h,k) = \begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ D_X f(w_0) & D_Y f(w_0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ k \end{bmatrix}. \tag{1.9}$$

2) Differentialet $D\Phi(w_0)$ er en toplineær isomorfi:

Vi ved, at $D\Phi(w_0)$ er en kontinuert lineær afbildning. Vi vil vise, at den desuden er bijektiv og dermed har en invers, og at denne også er en kontinuert lineær afbildning:

For et vilkårligt punkt $(\tilde{h}, \tilde{k}) \in X \times Z$ kan vi finde en løsning $(h,k) \in X \times Y$ til ligningen $\Phi(h,k) = (\tilde{h}, \tilde{k})$: Af første komponent ses, at vi må have $h = \tilde{h}$. Heraf fås i anden komponent, at $D_Y f(w_0)k = \tilde{k} - D_X f(w_0)\tilde{h}$. Denne har en entydig løsning, idet vi har forudsat, at $D_Y f(w_0)$ er en toplineær isomorfi, nemlig $k = (D_Y f(w_0))^{-1}(\tilde{k} - D_X f(w_0)\tilde{h})$. Heraf er det klart, at $D\Phi(w_0)$ er bijektiv.

Vi har samtidig beskrevet den inverse afbildning $(D\Phi(w_0))^{-1} : X \times Z \mapsto X \times Y$,

$$(D\Phi(w_0))^{-1}(\tilde{h}, \tilde{k}) = \begin{bmatrix} 1_X & 0 \\ -(D_Y f(w_0))^{-1} \circ D_X f(w_0) & (D_Y f(w_0))^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{h} \\ \tilde{k} \end{bmatrix}. \tag{1.10}$$

Således er den inverse lineære afbildning kontinuert, og $D\Phi(w_0)$ er en toplineær isomorfi.

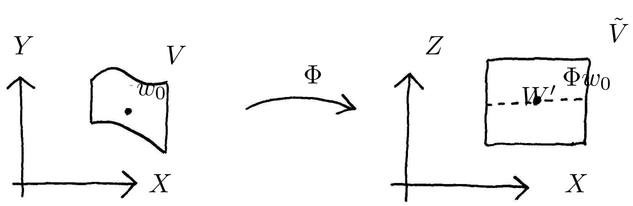
(Alternativt kunne vi her have brugt Banach's sætning og sluttet ud fra, at $D\Phi(w_0)$ er en kontinuert lineær isomorfi mellem Banach rum, at også den inverse lineære afbildning er kontinuert. Således ville vi undgå eksplicit reference til den inverse afbildning.)

3) Bevis for Implicit funktions sætningen

Da $D\Phi(w_0)$ er en toplineær isomorfi, findes ved invers funktions sætningen åbne omegne $V \in U$ og $\tilde{V} \in X \times Z$ af w_0 hhv. $\Phi(w_0)$, så Φ afbilder V C^r diffeomorft på $\tilde{V}$. Der findes altså en invers afbildning $\Phi^{-1} : X \times Z \mapsto X \times Y$, der er C^r differentiabel.

Straks formindsker vi den åbne mængde $\tilde{V}$ til en åben kugle B omkring $(x_0, f(w_0))$. Da Φ^{-1} er kontinuert, er $\Phi^{-1}(B)$ en åben omegn af w_0 i $X \times Y$. Vi kan således erstatte V med $\Phi^{-1}(B)$ og $\tilde{V}$ med B i ovenstående. Opstillingen er illustreret på figuren nedenfor.

Lad nu $W' = \tilde{V} \cap X \times \{\Phi(w_0)\}$. Mængden identificeres ved projektion med en delmængde $W \subseteq X$ ved $W \times \{\Phi(w_0)\} = W'$. Her bliver W indlysende en åben omegn af $x_0 \in X$. Af definitionen af Φ er førstekomponenten (X-delen) uændret under



afbildningen, så der gælder $(x, y) \in V \quad \Rightarrow \quad x \in W$. Nu, hvis $(x, y) \in V$ og $f(x, y) = 0$, gælder $\Phi(x, y) = (x, 0)$ og dermed $(x, y) = \Phi^{-1}(x, 0)$. Heraf defineres en C^r differentiabel afbildning $g : W \mapsto Y$ ved $g(x) = \Phi_2^{-1}(x, 0)$. Dermed gælder $x \in W$ og $y = g(x)$.

Omvendt gælder, at hvis $x \in W$ og $y = g(x)$, dvs. $(x, y) = (x, \Phi_2^{-1}(x, 0)) = \Phi^{-1}(x, 0)$, så er $f(x, y) = \Phi_2(x, y) = 0$. Desuden er $(x, y) \in \Phi^{-1}\tilde{V} = V$.

Eftersom $\Phi|V : V \mapsto \tilde{V}$ er en diffeomorfi, viser lemma 1, at differentialet $D\Phi(w)$ i et vilkårligt punkt $w \in U$ er en toplineær isomorfi. Dermed skal også $D_Y f(w)$ være en toplineær isomorfi, og vi bestemmer ganske som i *2)* $(D\Phi(w))^{-1}$, der jo er differentialet $D\Phi^{-1}(\Phi(w))$ for den inverse afbildning Φ^{-1} i punktet $\Phi(w)$. Det er bestemt ved ligning (1.10), hvor man blot i udledningen erstatter w_0 med et vilkårligt $w \in U$.

Da $\forall x \in X : g(x) = \Phi_2^{-1}(x, 0)$, er det nu klart med lemma 1, at

$$\begin{aligned} Dg(x) = D_X \Phi_2^{-1}(x, 0) &= -(D_Y f(\Phi^{-1}(x, 0)))^{-1} \circ D_X f(\Phi^{-1}(x, 0)) \\ &= -(D_Y f(x, g(x)))^{-1} \circ D_X f(x, g(x). \end{aligned} \tag{1.11}$$

Således er Implicit funktions sætningen vist.

1.1.1 Eksempel: Endelig dimension

Betragt tilfældet $X = \mathbb{R}^n$, $Y = \mathbb{R}^m$ og $Z = \mathbb{R}^k$ for numre n, m og k. Vi søger først matrixrepresentationen af de partielle differentialer $D_X f(x) : X \mapsto Z$, $D_Y f(x) : Y \mapsto Z$ taget i punktet $x \in U \subseteq X \times Y$.

For en vektor $(h, 0) \in X \times Y$, hvor $h \in X$, ser jeg på den definerende ligning for differentialet $Df(x)$:

$$f(x + (h, 0)) - f(x) = L(h, 0) + \varepsilon(h)\|h\|, \tag{1.12}$$

hvor ε er en epsilonfunktion og $\|\cdot\|$ en norm i Y. Her afhænger den lineære funktion L af $h \in X$ alene, og vi har netop $D_X f(x)(h) = L(h, 0)$. Lad $\{e_i^X\}_{i=1}^n$ betegne den kanoniske basis i $X = \mathbb{R}^n$. For $h = \alpha_i e_i^X$ med $\alpha_i \neq 0$ er nu for $i = 1, \ldots, n$

$$\tfrac{1}{\alpha_i}[f(x + (\alpha_i e_i^X, 0)) - f(x)] = D_X f(x) e_i^X + \varepsilon(h). \tag{1.13}$$

I grænsen $\alpha_i \to 0$ defineres den partielle afledte $\frac{\partial f}{\partial x_i^X}(x) \in Z$ mht. den i'te koordinat som venstresiden, og vi har $D_X f(x) e_i^X = \frac{\partial f}{\partial x_i^X}(x)$. Idet $D_X f(x)$ er lineær, får nu for reelle $h_1, \ldots h_n$

$$D_X f(x)(h_1 e_1^X + \cdots + h_n e_n^X) = \frac{\partial f}{\partial x_1^X}(x) h_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n^X}(x) h_n. \tag{1.14}$$

I matrixnotation ved den kanoniske basis i X og en basis i Z, mht. hvilken $f = (f_1, \ldots, f_k)$, fås for $h = (h_1, \ldots, h_n) \in X$

$$D_X f(x) h = \underline{\underline{D}}_X f(x)\ \underline{\underline{h}}. \tag{1.15}$$

Her er $\underline{\underline{h}}$ søjlematricen for h og matrixrepræsentationen for det partielle differential $D_X f(x)$ defineres elementvis ved $[\underline{\underline{D}}_X f(x)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j^X}(x)$. Her opdeles de partielle afledte i koordinater $\frac{\partial f_i}{\partial x_j^X}(x) = [\frac{\partial f}{\partial x_j^X}(x)]_i$.

Fuldstændig tilsvarende bestemmes matrixrepræsentationen for det andet partielle differential $D_Y f(x)$, og vi får blot for $k = (k_1, \dots, k_m) \in Y$ ved den kanoniske basis i $Y = \mathbb{R}^m$, $D_Y f(x)k = \underline{\underline{D}}_Y f(x)\ \underline{\underline{k}}$, hvor $(\underline{\underline{D}}_Y f(x))_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j^Y}(x)$, hvor $\frac{\partial f_i}{\partial x_j^Y}(x)$ som før angiver den partielle afledte af f_i med hensyn til j'te koordinat i $Y = \mathbb{R}^m$.

Forudsæt, at matricen for det partielle differential af f langs Y i punktet $w_0 = (x_0, y_0)$, $\underline{\underline{D}}_Y f(w_0)$, er regulær; samt at $f(x_0, y_0) = 0$.

Så giver implicit funktions sætningen, at der findes åbne omegne $W \subseteq X$ af x_0 og $V \subseteq U$ af w_0, og en afbildning $g : X \mapsto Y$, så:

1) $\forall x \in W : (x, g(x)) \in V$ og $f(x, g(x)) = 0$;

2) hvis $(x, y) \in V$ og $f(x, y) = 0$, er $x \in W$ og $y = g(x)$.

Desuden fås, at den fundne afbildning g har differentialet $\underline{\underline{D}}g(x) = -[\underline{\underline{D}}_Y f(w_0)]^{-1}\underline{\underline{D}}_X f(w_0)$, hvor de partielle differentialers matrixrepræsentanter er fundet herover, og $[\cdot]^{-1}$ betegner den inverse matrix.

1.2 Invers funktions sætningen

Sluttelig vil vi vise, at implicit funktions sætningen også medfører invers funktions sætningen.

Betragt Banach rum Y og X og en åben delmængde $\Omega \subseteq Y$. Givet er en afbildning $f : \Omega \mapsto X$, der er C^r differentiabel, $r \geqslant 1$.

Lad $y_0 \in U$ være et punkt, hvor differentialet $DF(y_0) : Y \mapsto X$ er en toplineær isomorfi.

Sætning 2 (Invers funktions sætningen). *Der findes åbne omegne $U_Y \subseteq \Omega$ af y_0 og $U_X \subseteq X$ af $F(y_0) \in x$, så $F|U_Y : U_Y \mapsto U_X$ er en C^r diffeomorfi.*

Den inverse afbildning F^{-1} har i et vilkårligt punkt $x = F(y)$ differentialet $DF^{-1}(F(y)) = -(DF(y))^{-1}$.

Bevis:
Lad $Z = X$. En given afbildning $f : X \times \Omega \mapsto X$, $f(x, y) = F(y) - x$, hvor $F : \Omega \mapsto X$ er C^r differentiabel. Bemærk, at $D_Y f(x, y) = DF(y)$.

Her er $f(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow\; F(y) = x$.

Givet et punkt $(x_0, y_0) \in X \times \Omega$, hvor $x_0 = F(y_0)$, og $DF(y_0) : Y \mapsto X$ er en toplineær isomorfi. Den gamle forudsætning fra implicit funktions sætningen, at $D_Y f(x_0, y_0) : Y \mapsto X$ er en toplineær isomorfi, opfyldes under denne forudsætning.

Således giver implicit funktions særlingen, at der findes åbne omegne $W \subseteq X$ af x_0 og $V \subseteq (X \times \Omega)$ af (x_0, y_0) og en C^r differentiabel afbildning $g : W \mapsto Y$, så

$$[(x, y) \in V \text{ og } x = F(y)] \qquad \Leftrightarrow \qquad [x \in W \text{ og } y = g(x)]. \tag{1.16}$$

Direkte heraf ses, at $V = W \times g(W)$. Således findes altså åbne omegne $W \subseteq X$ af x_0 og $U = g(W) \subseteq Y$ af y_0, så $F|U : U \mapsto W$ er en C^r diffeomorfi.

Den inverse afbildning $g : W \mapsto R$ har i et vilkårligt punkt $x = F(y) \in W$ differentialet $Dg(x) : X \mapsto Y$ givet ved implicit funktions sætningen:

$$\begin{aligned} Dg(x) &= -D_Y f(x, y)^{-1} \circ D_X f(x, y) = -(DF(y))^{-1} \circ 1_X \\ &= -(DF(y))^{-1}, \end{aligned} \tag{1.17}$$

og således er sammenhængen mellem de to sætninger vist.

Kapitel 2

Lineære isometrier i reelle vektorrum

Det vil i dette afsnit blive bevist, at rummet af lineære isometrier $\mathcal{O}(n)$, også kaldet *den ortogonale gruppe*, som er en delmængde af rummet af lineære afbildninger $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, er en kompakt differentiabel mangfoldighed af klasse C^∞ og dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Lad $\langle \cdot, \cdot \rangle$ betegne det sædvanlige indre produkt i $\mathbb{R}^n$. I det følgende vil $\underline{x}_i$ være vektorer i $\mathbb{R}^n$, og x_{ij} være j'te koordinat til $\underline{x}_i$. Ved δ_{ij} forstås Kronecker's delta. Betragt mængden

$$M = \left\{ \quad (\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad \middle| \quad \langle \underline{x}_i, \underline{x}_j \rangle = \delta_{ij} \quad \text{for alle} \quad i, j = 1, \ldots, n \quad \right\}. \tag{2.1}$$

Sætning 3. *M er en kompakt, differentiabel mangfoldighed af klasse C^∞ og dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.*

Bevis. Definér for $i, j = 1 \ldots n$ funktionerne

$$g_{ij} : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}, \quad g_{ij}(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) = \langle \underline{x}_i, \underline{x}_j \rangle - \delta_{ij}. \tag{2.2}$$

Det er klart, at $(\underline{x}_1, \ldots, \underline{x}_n) \in M$ hvis og kun hvis for enhver $i, j = 1 \ldots n$, $g_{ij}(\underline{x}_1 \ldots \underline{x}_n) = 0$. Opfatter vi g_{ij} som koordinatfunktioner for en afbildning $G : \mathbb{R}^{n \times n} \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$, vil M fremkomme som nulpunktsmængden af G, altså $M = G^{-1}(\{\underline{\underline{0}}\})$. Da $\{\underline{\underline{0}}\} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ er en afsluttet mængde, og da G har lutter kontinuerte koordinatfunktioner, er M afsluttet. M er trivielt begrænset udfra definitionen. Da de kompakte delmængder i reelle vektorrum netop er de begrænsede og afsluttede, er M således kompakt. Det skal nu vises, at M har dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$ og er C^r-differentiabel.

Dan nu for $p, q = 1, \ldots, n$ matricerne $\underline{\underline{J}}_{pq} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, hvor det ij'te element fremkommer ved at differentiere g_{ip} med hensyn til x_{qj}, så

$$\underline{\underline{J}}_{pq} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_{1p}}{\partial x_{q1}} & \cdots & \frac{\partial g_{1p}}{\partial x_{qn}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{np}}{\partial x_{q1}} & \cdots & \frac{\partial g_{np}}{\partial x_{qn}} \end{bmatrix}. \tag{2.3}$$

Jacobimatricen $\underline{\underline{J}} \in \mathbb{R}^{n^2 \times n^2}$ for afbildningen G kan da skrives kompakt som en stak af matricer $\underline{\underline{J}}_{pq}$, altså

$$\underline{\underline{J}} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{11} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{1n} \end{bmatrix} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{n1} \end{bmatrix} & \cdots & \begin{bmatrix} \underline{\underline{J}}_{nn} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

Lemma 3. *Hver af matricerne $\underline{\underline{J}}_{pp}$ er regulær.*

Bevis. Det ij'te element af $\underline{\underline{J}}_{pp}$ udregnes ved differentiation:

$$\frac{\partial}{\partial x_{pj}} \langle \underline{x}_i, \underline{x}_p \rangle = \frac{\partial}{\partial x_{pj}} \{x_{i1}x_{p1} + \ldots + x_{in}x_{pn}\} = \begin{cases} 2x_{ij} & \text{for} \quad i = p \\ x_{ij} & \text{for} \quad i \neq p \end{cases}. \tag{2.5}$$

Dermed kan $\underline{\underline{J}}_{pp}$ skrives

$$\underline{\underline{J}}_{pp} = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{(p-1)1} & \cdots & x_{(p-1)n} \\ 2x_{p1} & \cdots & 2x_{pn} \\ x_{(p+1)1} & \cdots & x_{(p+1)n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nn} \end{bmatrix}. \tag{2.6}$$

Rækkerne i denne matrix er indbyrdes ortogonale ifølge betingelserne i 2.1, og matricen er således regulær, hvilket skulle vises.

Betragt igen $\underline{\underline{J}}$ opdelt i delmatricer $\underline{\underline{J}}_{pq}$. Det vides nu, at $\underline{\underline{J}}_{11}$ har rang n. Dette medfører dog ikke, at $\underline{\underline{J}}$ har rang n^2. Betragt for eksempel $n+1$'te række i $\underline{\underline{J}}$, som fremkommer udfra det indre produkt $\langle \underline{x}_2, \underline{x}_1 \rangle$. Denne række er identisk med anden række i $\underline{\underline{J}}$, der fremkommer udfra $\langle \underline{x}_1, \underline{x}_2 \rangle$, da det indre produkt er symmetrisk. Generelt vil de $p-1$ første rækker i $\underline{\underline{J}}_{pq}$ være identiske med rækker med mindre index. Mere specifikt gælder dette netop for rækkerne som fremkommer udfra skalarprodukterne $\langle \underline{x}_p, \underline{x}_1 \rangle, \ldots, \langle \underline{x}_p, \underline{x}_{p-1} \rangle$. Der kan altså ses bort fra disse rækker uden at rangen af $\underline{\underline{J}}$ påvirkes. I det følgende vil det blive vist, at delmatricerne $\underline{\underline{J}}_{pq}$ i $\underline{\underline{J}}$ hvor $p > q$, udover disse lineært afhængige rækker indeholder lutter nuller.

Det ij'te element af $\underline{\underline{J}}_{pq}$, $q \neq p$, udregnes ved differentiation:

$$\frac{\partial}{\partial x_{qj}} \langle \underline{x}_i, \underline{x}_p \rangle = \frac{\partial}{\partial x_{qj}} \{x_{i1}x_{p1} + \ldots + x_{in}x_{pn}\} = \begin{cases} x_{pj} & \text{for} \quad i = q \\ 0 & \text{for} \quad i \neq q \end{cases}. \tag{2.7}$$

Betragt nu de $\underline{\underline{J}}_{pq}$, hvor $p > q$. Hvis disse skal have elementer forskellige fra 0 kræves som netop vist $i = q$ - disse matricer kan altså kun have elementer forskellige fra 0 i q'te række. Men eftersom $p > q$, vil enhver sådan række være identisk med en anden række af lavere index i $\underline{\underline{J}}$, og rangen af $\underline{\underline{J}}$ er således upåvirket af delmatricerne $\underline{\underline{J}}_{pq}$, hvor $p > q$.

Ved gausselimination af $\underline{\underline{J}}$ vil de første n søjler bidrage med n til rangen, da $\underline{\underline{J}}_{11}$ er regulær. Ignoreres de rækker i $\underline{\underline{J}}$, som er identiske med rækker af mindre index, vil det kun være nødvendigt at foretage rækkeoperationer som påvirker de øverste n rækker, da de resterende (under "diagonalen"i $\underline{\underline{J}}$) er nul. De næste n søjler vil bidrage med højst $n-1$ til rangen, da én af række er identisk med en tidligere række og derfor frasorteret. At der rent faktisk bidrages med $n-1$ til rangen sikres af, at de resterende rækker i J_{22} er lineært uafhængige som vist. Fortsættes på denne måde, vil hver af de n delmatricer $\underline{\underline{J}}_{pp}$ føre til et bidrag $n+1-p$ til rangen, så den samlede rang bliver

$$\rho = n + (n-1) + \ldots + 1 = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{2} n(n+1). \tag{2.8}$$

Nulliteten ν af matricen udregnes dernæst, idet søjletallet er lig med summen af rang og nullitet. Der fås derfor $\nu = n^2 - \rho = \frac{1}{2}n(n-1)$ for alle $x \in M$.

Det ses nu at M er en mangfoldighed med dimension $\nu = \frac{1}{2}n(n-1)$. M er differentiabel af klasse C^∞, eftersom de indre produkter er C^∞, hvilket skulle vises.
Vi vender nu opmærksomheden mod lineære isometrier. Lad $(e_1, \ldots, e_n)$ betegne den sædvanlige basis i $\mathbb{R}^n$. Betragt heri rummet af lineære isometrier $\mathcal{O}(n)$ og definér afbildningen

$$\Phi : \mathcal{O}(n) \mapsto M, \quad \Phi(L) = [L(e_1), \ldots, L(e_n)] \,. \tag{2.9}$$

Sætning 4. Φ *er en homeomorfi.*

Bevis. Det skal vises, at Φ er injektiv, surjektiv, kontinuert og har kontinuert invers. Betragt for vilkårlige isometrier L_1 og L_2 i $\mathcal{O}(n)$ ligningen

$$\Phi(L_1) = \Phi(L_2) \quad \Leftrightarrow \quad \{L_1(e_1) = L_2(e_1)\} \wedge \ldots \wedge \{L_1(e_n) = L_2(e_n)\} \,. \tag{2.10}$$

Da enhver vektor i $\mathbb{R}^n$ kan udtrykkes som linearkombination af basisvektorer, og da billederne under L_1 og L_2 af samtlige basisvektorer er identiske, vil enhver vektor grundet linearitet have samme billede under L_1 og L_2, altså $L_1 = L_2$. Hermed er Φ injektiv. For at vise surjektivitet skal det undersøges, hvorvidt der for ethvert $Y = Y_1..Y_n \in M$ findes en lineær isometri $L \in \mathcal{O}(n)$, så

$$\Phi(L) = Y \quad \Leftrightarrow \quad \{L(e_1) = Y_1\} \wedge \ldots \wedge \{L(e_n) = Y_n\} \,. \tag{2.11}$$

Da enhver lineær isometri er regulær, har samtlige af disse ligninger netop én løsning. Afbildningen Φ associerer blot lineære isometrier med deres matrixfremstillinger med hensyn til den sædvanlige basis. Kontinuitet af Φ følger åbenlyst. Kontinuitet af den inverse, Φ^{-1}, følger af, at Φ er kontinuert, at $\mathcal{O}(n)$ er kompakt, og at M er Hausdorff. Altså er Φ en homeomorfi.

Hovedresultatet for dette afsnit er dermed opnået: rummet af lineære isometrier $\mathcal{O}(n)$ i $\mathbb{R}^n$ er en kompakt, differentiabel mangfoldighed af klasse C^∞ og dimension $\frac{1}{2}n(n-1)$.

Kapitel 3

Indlægning af differentiable mangfoldigheder i vektorrum

Det vil i de følgende afsnit blive vist, at enhver n-dimensional C^r-differentiabel kompakt mangfoldighed, hvor $r \geqslant 1$, kan indlægges i et euklidisk vektorrum af tilstrækkeligt høj dimension. Der vil herunder blive vist en række delresultater eller lemmaer, som fører frem til dette.

3.1 C^∞-udvidelser af kort på mangfoldigheder

Betragt en n-dimensional differentiabel mangfoldighed M af klasse C^r modelleret over $\mathbb{R}^n$ med den sædvanlige euklidiske norm $||\cdot||$.

Sætning 5. *For ethvert $x \in M$ findes en åben omegn U af x og en afbildning $\phi : M \mapsto \mathbb{R}^n$ af klasse C^r, så U sammen med restriktionen $\phi|U$ af ϕ til U udgør et kort $(U, \phi|U)$ på M.*

Bevis. For vilkårligt fastholdt $x_0 \in M$, lad (V, θ) være et kort på M, så $x_0 \in V$. Altså udgør $\theta(V)$ en omegn omkring $y_0 = \theta(x_0)$, og der findes således et tal $\varepsilon > 0$, så de to koncentriske kugler $B_\varepsilon(y_0)$ og $B_{2\varepsilon}(y_0)$ omkring y er helt indeholdt i $\theta(V)$. Planen er at definere ϕ som en restriktion af θ til urbilledet af $B_\varepsilon(y_0)$, og udvide til resten af M, så $\phi = 0$ udenfor V. For at sikre differentiabiliteten i det mellemliggende område defineres derfor en C^∞ lokaliseringsfunktion $\lambda : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$. Lad

$$\lambda(x) = \begin{cases} \exp(-\frac{1}{x^2}) & \text{for} \quad x > 0, \\ 0 & \text{for} \quad x \leqslant 0. \end{cases} \tag{3.1}$$

For $x > 0$ gælder

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lambda(x) = \frac{2}{x^3}\exp(-\frac{1}{x^2}) \to 0 \quad \text{for} \quad x \to 0+. \tag{3.2}$$

Funktionen er således differentiabel i $x = 0$, og differentiabilitet af højere orden kan nemt vises ved induktion. λ er altså af klasse C^∞. Herudfra kan en anden C^∞-funktion $\rho_{a,b} : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ defineres, så for $b > a > 0$,

$$\rho_{a,b}(r) = \frac{\lambda(b^2 - ||r||^2)}{\lambda(b^2 - ||r||^2) + \lambda(||r||^2 - a^2)}. \tag{3.3}$$

Denne funktion er C^∞ og antager værdien 1 for $||r|| \leqslant a$ og 0 for $||r|| \geqslant b$. Sæt $a = \varepsilon$ og $b = 2\varepsilon$.

Lad nu $U = \theta^{-1}(\varepsilon(y_0))$ og $\tilde{U} = \theta^{-1}(2\varepsilon(y_0)$. U og $\tilde{U}$ er altså urbilleder af åbne kugler i $V \subseteq \mathbb{R}^n$ under den kontinuerte funktion θ, og således selv åbne mængder i M. Betragt $\theta|U$, dvs. restriktionen af θ til U. $(U, \theta|U)$ udgør et kort på M. Nu skal $\theta|U$ blot udvides til hele M. Sæt

$$\phi(x) = \begin{cases} \theta(x)(\rho_{\varepsilon,2\varepsilon} \circ \theta)(x) & \text{for} \quad x \in V \subseteq M, \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases} \tag{3.4}$$

For $x \in \tilde{U}$ er ϕ produktet af C^r-funktionen θ og C^∞-funktionen ρ. Langs randen af $\tilde{U}$ vil ϕ gå imod 0 på C^r-differentiabel vis. Udvidelsen til $x \notin V$ er derfor C^r upåvirket af gaffelforskriften. Hermed er ϕ af klasse C^r defineret på hele M, så $(U, \phi|U)$ udgør et kort på M, hvilket skulle vises.

3.2 Overdækning af kompakte mangfoldigheder

Lad M være en kompakt, n-dimensional differentiabel C^r-mangfoldighed.

Lemma 4. *Der findes en åben endelig overdækning $U_1, \ldots, U_k$ af M, samt C^r-funktioner $\phi_1, \ldots, \phi_k$ og $\rho_1, \ldots, \rho_k$, $i = 1 \ldots k$,*

$$\phi_i : M \mapsto \mathbb{R}^n \quad \textit{og} \quad \rho_i : M \mapsto \mathbb{R}, \quad \textit{så} \tag{3.5}$$

1. *$(U_i, \phi_i|U_i)$ udgør et C^r-kort på M,*
2. *$\rho_i(x) = 1$ hvis og kun hvis $x \in \overline{U_i}$,*
3. *$\sum_{i=1}^k \rho_i(x) > 0$ for ethvert $x \in M$.*

Bevis. det er i sidste afsnit vist, at der omkring ethvert $x \in M$ findes en omegn og en C^r-funktion hvis restriktion til omegnen definerer et C^r-kort på M. Udstyr derfor ethvert punkt $x \in M$ med et sådant kort. Disse kort udgør nu en overdækning af M. Eftersom M er kompakt kan denne overdækning udtyndes til en endelig overdækning bestående af k elementer for et eller andet k. Hermed er første punkt eftervist. Vælg nu funktionerne ρ_i og ϕ_i i overensstemmelse sidste afsnits definitioner, altså ifølge ligning (3.3) og (3.4).

Med disse definitioner følger anden betingelse umiddelbart. Tredje betingelse følger af, at ethvert $x \in M$ ligger i en eller anden mængde U_i, så summen $\sum_{i=1}^k \rho_i(x)$ har et positivt led. Da alle led er mindst 0, bliver selve summen positiv. Det ønskede er altså vist.

Definér nu $f : M \mapsto \mathbb{R}^{(n+1)\times k}$ ved

$$f(x) = \begin{bmatrix} \underline{\underline{[\phi_1(x)]}} & \ldots & \underline{\underline{[\phi_k(x)]}} \\ \\ \rho_1(x) & \ldots & \rho_k(x) \end{bmatrix} \tag{3.6}$$

Lemma 5. *$f(x)$ er en homeomorfi på sit billede $f(M)$.*

Bevis. det skal vises, at $f(x)$ er injektiv, surjektiv, kontinuert og har kontinuert invers. Surjektiviteten følger direkte af definitionen.

f er injektiv: antag $f(x_1) = f(x_2)$. Dermed skal for samtlige $i = 1..k$ gælde $\phi_i(x_1) = \phi_i(x_2)$ og $\rho_i(x_1) = \rho_i(x_2)$. Eftersom M er overdækket af omegne U_i, hvor $\rho_i = 1$ netop i afslutningerne $\overline{U_i}$, vil der for ethvert x findes et i, hvor der gælder $\rho_i(x_1) = 1$ og følgelig $\rho_i(x_2) = 1$. Det understreges, at $\rho_i(x) = 1$ hvis og *kun* hvis $x \in \overline{U_i}$, hvorfor x_1 og x_2 da nødvendigvis må ligge i $\overline{U_i}$. Eftersom restriktionen af ϕ_i er injektiv i $\overline{U_i}$, hvor kravet $\phi_i(x_1) = \phi_i(x_2)$ gælder, fås nu $x_1 = x_2$. Dermed er f injektiv. Bemærk, at dette gælder selvom der findes yderligere overlappende omegne som indeholder x_1 eller x_2.

At f er kontinuert følger af, at samtlige koordinatfunktioner som f er opbygget af, er kontinuerte. Da f således er en kontinuert bijektiv afbildning af et kompakt topologisk rum, M, ind i et Hausdorff rum, $\mathbb{R}^{(n+1)\times k}$, har f en kontinuert invers f^{-1}.

Sætning 6. *f er en indlægning af klasse C^r.*

Bevis. Da f er en homeomorfi skal det blot vises, at f er differentiabel af klasse C^r, samt at differentialet i ethvert punkt er injektivt.

En afbildning mellem to mangfoldigheder $f : M \mapsto N$ siges at være C^r-differentiabel, såfremt enhver sammensætning $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$, hvor ϕ og ψ er kort på henholdsvis M og N, er C^r-differentiabel. I dette tilfælde kan billedrummet $f(M) \subseteq \mathbb{R}^{(n+1)\times k}$ opfattes som en differentiabel mangfoldighed modelleret på sig selv, med identiteten som kort.

Koordinatfunktionerne til $\phi \circ f \circ \psi^{-1}$ er dermed alle differentiable af klasse C^r. Det skal nu blot sikres, at differentialet $D(\phi \circ f \circ \psi^{-1})(x_0)$ er injektivt i ethvert punkt $x_0 \in M$. Dette er ensbetydende med at afbildningsmatricen for differentialet er regulær overalt. For enhvert $x_0 \in M$ vil mindst én koordinatfuntion $\rho_i(x_0) \neq 0$, og det er da tilstrækkeligt at vise, at differentialet her har regulær afbildningsmatrix. Dette er netop tilfældet, eftersom ϕ_i er en diffeomorfi. Altså er f en indlægning.

Det er nu bevist, at enhver kompakt, n-dimensional differentiabel C^r-mangfoldighed kan overdækkes med et eller andet antal kort, k, og ved en fast procedure indlægges i et reelt vektorrum af dimension $(n+1)k$.

Kapitel 4

Kim af afbildninger

4.1 Exercise 15.1

Betragt den åbne mængde $U \subseteq \mathbb{R}^n$ og lad $f : U \mapsto \mathbb{R}^n$ være af klasse C^1.

Påstand. Hvis f har lutter ikke-degenererede nulpunkter, så vil enhver kompakt delmængde $K \subseteq U$ højst indeholde et endeligt antal nulpunkter for f.

Bevis. Beviset føres indirekte. Antag at f har uendeligt mange nulpunkter i en kompakt og dermed følgekompakt delmængde $K \subseteq \mathbb{R}^n$. En uendelig følge i en følgekompakt mængde har mindst ét fortætningspunkt i mængden, x_0. I enhver udprikket omegn af x_0 findes der altså et nulpunkt.

Når ikke x_0 er degenereret, så er $Df(x_0)$ en isomorfi, og der findes således en udprikket omegn omkring x_0 hvori $f(x) \neq 0$. Dette er imidlertid i strid med at f har et nulpunkt i enhver udprikket omegn om x_0. Således kan f højst have endeligt mange nulpunkter i K, hvilket skulle vises.

4.2 Rang og ækvivalens af kim

Vi betragter $\mathbb{R}^2$ med koordinaterne (u,x) $\in \mathbb{R}^2$.

1) Vi vil betemme rangen af afbildningen F: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i alle punkter (u,x) $\in \mathbb{R}^2$, når F er defineret ved:

i) F_i(u,x) = (u,x). Rangen kan findes ved at kigge på rangen af matricerepræsentationen for differentialet $\underline{\underline{D}}F(u,x)$ (Jacobimatricen). Da Jacobimatricen er: $\underline{\underline{D}}F_i(u,x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, må rangen være 2.

ii) F_{ii}(u,x) = (u,x^2). Jacobimatricen er:

$$\underline{\underline{D}}F_{ii}(u,x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x \end{bmatrix}. \tag{4.1}$$

Determinanten er:

$$\underline{\underline{D}}F_{ii}(u,x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2x \end{vmatrix} = 1 \cdot 2x = 2x. \tag{4.2}$$

Af Jacobimatricen kan det ses at hvis determinaten er 0 vil matricen have rang 1, ellers er rangen 2.

iii) F_{iii}(u,x) = (u,$ux - x^3$). Jacobimatricen er:

$$\underline{\underline{D}}F_{iii}(u,x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u-3x^2 \end{bmatrix}. \tag{4.3}$$

Determinanten er:

$$\underline{\underline{D}}F_{ii}(u,x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u-3x^2 \end{vmatrix} = u - 3x^2. \tag{4.4}$$

Af Jacobimatricen kan det ses at hvis determinaten 0 vil Jacobimatricen have rang 1, ellers er rangen 2.

2) I tilfældene (ii) og (iii) sætter vi K = {(u,x) $\in \mathbb{R}^2$ | rk$_{(ux)}F$ = 1}.

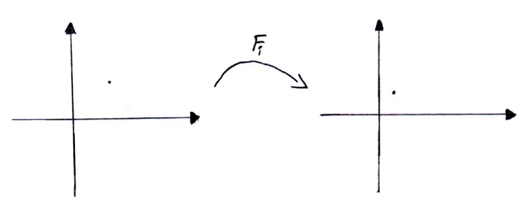
Vi vil vise at K er en glat kurve i begge tilfælde.
Hvis K for tilfælde ii) skal have rang 1, må determinanten være nul, så $2x = 0 \Leftrightarrow x = 0$. Så K må i tilfældet ii) give en kurve i $\mathbb{R}^2$. Kurven K er en ret linje på u-aksen, og da $u \in \mathbb{R}$ må K være glat.
Hvis K for tilfældet iii) skal have rang 1, må $u - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 = u$. Så K må i tilfældet iii) også give en kurve i $\mathbb{R}^2$. Kurven K er en parabel: $3x^2 = u$, og da $u \in \mathbb{R}$ må K også være glat.

Vi laver en simpel parametrisering α: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ af K.
I tilfældet ii) skal x = 0, så $\alpha_{ii}(t) = (t, 0)$. I tilfældet iii) skal $x^2 = u$, så en parametrisering α kan gives ved $\alpha_{iii}(t) = (3t^2, t)$.
Vi vil nu bestemme rangen af $F{\circ}\alpha$ for alle parametriserede værdier af α:

I tilfældet ii) bliver $F_{ii} \circ \alpha_{ii}(t)$ =$F_{ii}\,(\alpha_{ii}(t)) = (t, 0)$. Så Jacobimatricen er $\underline{\underline{D}}F_{ii} \circ \alpha_{ii}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, så rangen må være 1.

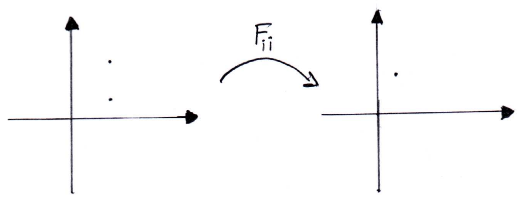
I tilfældet ii) bliver $F_{iii} \circ \alpha_{iii}(t) = F_{iii}\,(\alpha_{iii}(t)) = (3t^2, 3t^2 * t - 3t) = (3t^2, 2t^3)$. Så Jacobimatricen er $\underline{\underline{D}}F_{iii} \circ \alpha_{iii}(t) = \begin{bmatrix} 6t \\ 6t^2 \end{bmatrix}$, så rangen må være 1 når t = 0, ellers må rangen være 2.

3) Vi vil vise at kimen $(\mathbb{R}^2, 0) {\to} (\mathbb{R}^2, 0)$ givet ved de tre glatte afbildninger ikke er parvist ækvivalente.
<u>Bevis.</u>
I tilfælde i) kan kimen geometrisk beskrives som afbildningen:



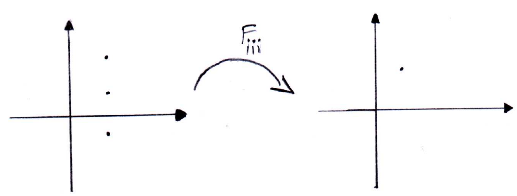
Her afbildes netop et punkt $(u, x) \in \mathbb{R}^2$ ind i ethvert punkt $F(u, x) \in \mathbb{R}^2$.

I tilfælde ii) kan kimen geometrisk beskrives som afbildningen:



Her afbildes enten et eller to forskellige punkter $(u_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$ ind i samme punkt $F(u, x) \in \mathbb{R}^2$. rummet.

I tilfælde iii) kan kimen beskrives som afbildningen:



Her afbildes et, to eller tre forskellige punkter $(u_i, x_i) \in \mathbb{R}^2$ ind i samme punkt i $F(u, x) \in \mathbb{R}^2$. rummet.

Hvis to kim skal være ækvivalente gælder bogens[1] definition side 10 kapitel IV. Så hvis kimene F_a og F_b er ækvivalente, skal der findes kim H og G af diffeomorfier, så $H \circ F_a = F_b \circ G$. H sættes til identiteten, og G: $(\mathbb{R}^2, x_0) \to (\mathbb{R}^2, x_1)$. En differmorf afbildning er en homeomorfi så G skal være injektiv.

Da to forskellige punkter under F_{ii} kan have samme billede, mens dette ikke er muligt for F_i, kan ingen injektiv funktion G opfylde den ovenstående betingelse, og således heller ingen diffeomorfi. Så kimen F_{ii} er ikke ækvivalent med kimen F_i!

På tilsvarende vis finder vi, at der ikke gælder ækvivalens mellem kimene F_{iii} og F_i, ej heller F_{iii} og F_{ii}.

4.3 Morse kim

Vi vil vise at $\boldsymbol{f}$: $(\mathbb{R}^2, 0) \to (\mathbb{R}, 0)$ givet ved $\boldsymbol{f}$(x,y) $= x^2 - xy$, er en Morse kim.

Vi har at $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - y$ og $\frac{\partial f}{\partial y} = -x$, så partielle afledede i x, y $= 0$ er; $\frac{\partial f}{\partial x}(0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Da alle de partielt afledede i x, y $= 0$ er nul så er rangen (rg_0F) i (x,y) $=$ (0,0) nul. $\boldsymbol{f}$ må derfor være en singulær kim, da rg_0F $= 0 \leqslant$ min(2,1) $= 1$. Hessianten er;

$$\underline{\underline{H}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.5}$$

[1] Vagn Lundsgaard Hansen: Grundbegreber i den Moderne Analyse. Institut for Matematik, DTU. 1995.

Determinanten af Hessianten er; $|\underline{\underline{H}}| = 2 * 0 - (-1 * -1) = -2 \neq 0$. Da kimen $\boldsymbol{f}$ er singulær og determinanten af Hessianten ikke er nul er $\boldsymbol{f}$ en Morse kim (se bogen side 18 kapitel IV).

Vi vil bestem indekset af $\boldsymbol{f}$. Vi finder først egenværdierne for $\underline{\underline{H}}$:

$$\left| \begin{bmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 0-\lambda \end{bmatrix} \right| = \lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0. \tag{4.6}$$

Ved at løse andengradsligningen fås: $\lambda = 1 \pm \sqrt{3}$. Matricen $\underline{\underline{H}}$ har altså en negativ egenværdi $\lambda = 1 - \sqrt{3}$ og derfor har $\boldsymbol{f}$ index 1.

Vi vil lave et koordinatskifte der bringer $\boldsymbol{f}$ ind i normal form. Vi omkriver først $\boldsymbol{f}$ til

$$x^2 - yx = [x, y] \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Vi finder egenværdierne λ for afbildningsmatricen

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} \Leftrightarrow \lambda = \frac{1 \pm \sqrt{2}}{2}. \tag{4.8}$$

Egenvektoren for $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ findes ved Gauss elimination;

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 - \frac{1+\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{bmatrix} -\sqrt{2}+1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.9}$$

Egenvektoren for $\lambda = \frac{1+\sqrt{2}}{2}$ findes tilsvarende;

$$\begin{bmatrix} 1 - \frac{1-\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 0 - \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2}+1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow v_2 = \begin{bmatrix} \sqrt{2}-1 \\ 1 \end{bmatrix}. \tag{4.10}$$

Vi kan nu finde den nye afbildningsmatrix Λ, idet;

$$\underline{\underline{V}}^{-1}\underline{\underline{AV}} = \underline{\underline{\Lambda}} = \underline{\underline{\mathrm{diag}}}(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Vi får heraf, at koordinatskiftet for $\boldsymbol{f}$ kan repræsenteres ved matricen:

$$x^2 - yx = [\tilde{x}, \tilde{y}]\,\underline{\underline{\Lambda}} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = [\tilde{x}, \tilde{y}] \begin{bmatrix} \frac{1+\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{y} \end{bmatrix} = \tag{4.12}$$

$$\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)\tilde{x}^2 + \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)\tilde{y}^2. \tag{4.13}$$

Ved brug af Morse Lemmaet bogen side 22 kapitel IV får vi at for indeks 1 er normalformen:

$$f_k(x_1, ..., x_n) = f_1(\tilde{x}, \tilde{y}) = \tilde{x}^2 - \tilde{y}^2. \tag{4.14}$$

Dette passer med at koordinatskiftet er:

$$x^2 - yx = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\tilde{x}^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\tilde{y}^2. \tag{4.15}$$

Altså er index og normalform Morse kimen bestemt.